Marche aléatoire simple dans $\mathbb{Z}^d$: récurrente $d \leq 2$

transiente $d \geq 3$

$d \geq 3$ "on part à l'infini", "en tournant"

Loi du 0-1 de Hewitt-Savage

$(X_1, X_2, \ldots X_n \ldots)$ iid à valeurs dans E

$F : E^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ invariante par permutation de support fini ; $\forall \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ permutation telle que tous les entiers sauf un nombre fini sont des points fixes.

Alors $F(X_1, X_2 \ldots X_n \ldots)$ est déterministe

C cône d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^d$ $(x \in C \Rightarrow \lambda x \in C)$ et fermé

(S_n) marche aléatoire simple dans $\mathbb{Z}^d$ $d \geq 3$

$S_n = X_1 + X_2 \ldots + X_n$

$F_C = \mathbb{1}\{\exists N, \forall n \geq N, X_1 + \ldots + X_n \in C\}$

Hewitt Savage : $F(X_1, \ldots X_n \ldots)$ est p.s. constante

soit $F_C = 0$ p.s.

$F_C = 1$ p.s.

En fait, on peut montrer que si $C \neq \mathbb{R}^d$ alors

$F_C = 0$ p.s.

si T est une symétrie de $\mathbb{Z}^d$, alors comme les X_n sont invariantes par T, $F_C = F_{T(C)}$ $\Rightarrow$ si $F_C = 1$, $F_{T(C)} = 1$ $\Rightarrow$ $F_{C \cap T(C)} = 1$

$\Rightarrow$ on se ramène à une situation $F_{C'} = 1$ et $C' \cap C'' = \{0\}$

$F_{C''} = 1$

[propriété liée à la non-existence de fonctions harmoniques bornées dans $\mathbb{R}^d$]

Mesures Invariantes

déf : μ est une mesure invariante pour la chaîne de Markov (X_n) si $\forall x \in E$

$$\mu(x) = \sum_{y \in E} \mu(y) Q(y,x)$$

Si E est fini $|E| = n$, Q est une matrice $n \times n$

$$\forall x \in E, \quad \sum_y Q(x,y) = 1 \qquad Q \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre pour la valeur propre $1 \Rightarrow {}^tQ$ admet 1 comme valeur propre. $\exists V \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ tq ${}^tQV = V$

on pose $\mu(x) = V_x$, $\mu(x) = \sum_{y \in E} \mu(y) Q(y,x)$

On peut montrer (théorème de Perron Frobenius) qu'on peut choisir V telque $\forall x \in E$, $V(x) \geq 0 \rightarrow \mu(x)$ est une mesure invariante.

$\sum_{x \in E} \mu(x) < \infty$ on peut se ramener au cas où μ est une mesure de probabilités

Sous la probabilité $\mathbb{P}_\mu$, $\mathbb{P}_\mu(X_1 = x) = \sum_{y \in E} \mu(y) Q(y,x) = \mu(x)$

Par récurrence, $\forall n$ $\mathbb{P}_\mu(X_n = x) = \mu(x)$

déf : Une chaîne de Markov sur E dénombrable est réversible si $\exists \mu$ mesure sur E telle que $\forall x, y$ $\mu(x) Q(x,y) = \mu(y) Q(y,x)$ $(*)$

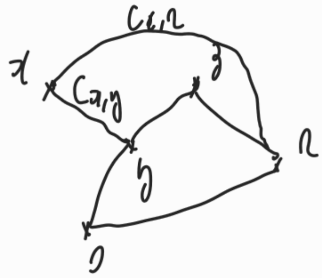
Dans ce cas $\sum_{x \in E} \mu(x) Q(x,y) = \sum_{x \in E} \mu(y) Q(y,x) = \mu(y) \sum_{x \in E} Q(y,x) = \mu(y)$

μ est invariante.

Une chaîne est réversible ssi $\exists (C_{x,y})_{x,y \in E}$ famille de réels ≥ 0 tq $\forall x,y$.

$$Q(x,y) = \frac{C_{x,y}}{\sum_{z \in E} C_{x,z}} \quad \left(\text{condition: } \forall x, \sum_{z \in E} C_{x,z} < \infty \right)$$

dans ce cas, $\mu(x) = \sum_{z \in E} C_{x,z}$ est une mesure qui vérifie $(*)$



Dans le cas de la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$, $C_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{si } |x-y|_1 = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Si G est un graphe fini, la marche aléatoire simple sur G est la chaîne de Markov $Q(x,y) = \dfrac{\mathbb{1}_{x \sim y}}{\deg(x)}$

$\rightarrow$ réversible avec $C_{x,y} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \sim y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ $\rightarrow \mu(x) = \deg(x)$

Analogie avec les réseaux électriques : $C_{x,y}$: conductance entre x et y

$$\text{conductance} = \frac{1}{\text{Résistance}}$$

(livre de Doyle - Snell)

__Th__ : si x est récurrent, la mesure μ définie par

$$\mu(y) = E_x\left(\sum_{k=0}^{H_x^+ - 1} \mathbb{1}_{\{X_k = y\}} \right)$$

est une mesure invariante. $\mu(y) > 0$ si et seulement si $y \in C_x$

(classe de récurrence de x)

dém si $y \notin C_x$, alors $\mathbb{E}_x(N_y) = U(x,y) = 0$

$$\mathbb{E}_x(N_y) = \mathbb{E}_x\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{X_k=y}\right) \geq \mu(y) \Rightarrow \mu(y)=0$$

$$\mu(y) = \mathbb{E}_x\left(\sum_{k=1}^{H_x} \mathbb{1}(X_k=y)\right) = \sum_{z\in E} \mathbb{E}_x\left(\sum_{k=1}^{H_x} \mathbb{1}(X_{k-1}=z, X_k=y)\right)$$

$$= \sum_{z\in E} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}_x \, \mathbb{1}_{\{k\leq H_x, X_{k-1}=z, X_k=y\}}$$

$$= \sum_{z\in E} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}_x \, \mathbb{1}(k\leq H_x, X_{k-1}=z)\, Q(z,y)$$

$$= \sum_{z\in E} \mathbb{E}_x\left(\sum_{k=1}^{H_x} \mathbb{1}(X_{k-1}=z)\right) Q(z,y)$$

$$= \sum_{z\in E} \mu(z)\, Q(z,y)$$

$\mu Q = \mu$ et par récurrence, $\forall n$, $\mu Q_n = \mu$

$$\mu(x) = 1 = \sum_{z\in E} \mu(z) Q_n(z,x)$$

Si $y \in C_x$, $\exists n$, $Q_n(y,x) > 0 \Rightarrow \mu(y) < \infty$

$\exists m$ $Q_m(x,y) > 0$

$$\mu(y) = \sum_{z\in E} \mu(z) Q_m(z,y) \geq Q_m(x,y) > 0$$

S'il existe plusieurs classes de récurrence $(C_x)_{x\in I}$,

on peut définir des mesures invariantes ainsi :

pour tout $x \in I$, on a construit une mesure invariante $\mu^{(x)}$

$$\mu = \sum_{x\in I} \lambda_x \mu^{(x)} \qquad \lambda_x \geq 0$$

Théorème Si (X_n) récurrente irréductible, il existe une unique mesure invariante à constante multiplicative près.

<u>Dém</u> : Soit μ mesure invariante. Montrons que $\forall p$ entier ≥ 0,

$$\mu(y) \geq \mu(x)\, E_x\left(\sum_{t=0}^{p \wedge H_x - 1} \mathbb{1}_{(X_t = y)}\right)$$

Vrai si $p=0$. Par récurrence, si c'est vrai pour p

$$\mu(y) = \sum_{z\in E} \mu(z)\, Q(z,y) \geq \mu(x) \sum_{z\in E} E_x\left(\sum_{t=0}^{p\wedge H_x - 1} \mathbb{1}_{(X_t = z)}\right) Q(z,y)$$

$$= \mu(x) \sum_{z\in E} \sum_{t=0}^{p} E_x\, \mathbb{1}_{(X_t = z,\ t \leq H_x - 1,\ X_{t+1} = y)}$$

$$= \mu(x)\, E_x\left(\sum_{t=0}^{p\wedge H_x - 1} \mathbb{1}_{(X_{t+1} = y)}\right)$$

$$= \mu(x)\, E\left(\sum_{t=0}^{(p+1)\wedge (H_x - 1)} \mathbb{1}_{(X_t = y)}\right)$$

$p \to \infty$
$$\mu(y) \geq \mu(x) \underbrace{E_x\left(\sum_{t=0}^{H_x - 1} \mathbb{1}_{(X_t = y)}\right)}_{\nu_x(y)}$$

ν_x : mesure invariante

$$\forall y, \quad \mu(y) \geq \mu(x)\, \nu_x(y)$$

$$\forall n, \quad \mu(x) = \sum_z \mu(z)\, Q_n(z,x) \geq \sum_{z\in E} \mu(x)\nu_x(z)\, Q_n(z,x)$$

$$\mu(x) \underbrace{\nu_x(x)}_{1} = \mu(x)$$

Comme l'inégalité est une égalité, $\mu(z) = \mu(x)\, \nu_x(z)$
pour tout z tq $Q_n(z,x) > 0$

Or si la chaîne est irréductible, $\forall z$, $\exists n$, $Q_n(z,x) > 0$

$\to \forall z, \quad \mu(z) = \mu(x)\, \nu_x(z)$

Corollaire : Si (X_n) récurrente irréductible, on a deux possibilités

(i) la masse totale de toute mesure invariante est finie.

Soit μ la probabilité invariante. On a $\mathbb{E}_x(H_x) = \frac{1}{\mu(x)}$

On dit que la chaîne est récurrente positive

(ii) la masse totale de toute mesure invariante est infinie

Alors $\forall x$, $\mathbb{E}_x(H_x) = \infty$

On dit que la chaîne est récurrente nulle.

démo (i) $\nu_x(y) = \mathbb{E}_x\left(\sum_{k=1}^{H_x} \mathbb{1}_{(X_k=y)}\right)$ mesure invariante

$\mu = C\nu_x$ $\qquad \mu(E) = 1 = C\nu_x(E) \rightarrow C = \frac{1}{\nu_x(E)}$

$$\mu(x) = \frac{\nu_x(x)}{\nu_x(E)} = \frac{1}{\nu_x(E)}$$

$$\nu_x(E) = \sum_y \nu_x(y) = \sum_y \mathbb{E}_x\left(\sum_{k=1}^{H_x} \mathbb{1}_{(X_k=y)}\right) = \mathbb{E}_x \underbrace{\sum_{k=1}^{H_x} \underbrace{\sum_y \mathbb{1}_{(X_k=y)}}_{1}}_{H_x}$$

(ii) idem

Prop : si (X_n) chaîne irréductible, si $\exists \mu$ proba invariante, alors (X_n) est récurrente positive

[si $\exists \mu$ mesure invariante de masse infinie, on ne peut conclure.

marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$. $\mu(x) = 1$ $\forall x \in \mathbb{Z}^d$, μ invariante]

Dém : soit ν mesure invariante, soit $y \in E$, $\nu(y) > 0$, $\forall x \in E$

$U(x,y) = \sum_n Q_n(x,y) \leq U(y,y)$ on multiplie par $\nu(x)$ à gauche et on somme sur x

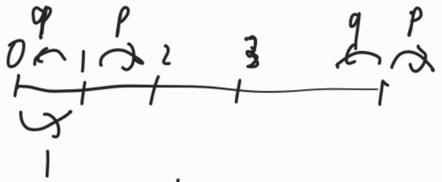
$$\sum_n \underbrace{\nu Q_n(y)}_{\nu(y)} \le \nu(E)\, U(y,y)$$

∞ $\quad\rightarrow \nu(E)\, U(y,y) = \infty \qquad \nu(E) < \infty$

$$U(y,y) = \infty$$

$\rightarrow$ y est récurrent

exemples : (i)



$p+q=1$

$q > \frac{1}{2}$

$c_{0,1} = 1$

réversible $\quad C_{n,n+1} = \left(\frac{p}{q}\right)^n$

$\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} \quad \left(\frac{p}{q}\right)^n$

$$Q(n,n+1) = \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^n}{\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \left(\frac{p}{q}\right)^n} = \frac{\frac{p}{q}}{1+\frac{p}{q}} = \frac{p}{p+q} = p$$

$$\mu(n) = \sum_k C_{n,k} = C_{n,n-1} + C_{n,n+1} = \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}\left(1+\frac{p}{q}\right)$$

$$= \frac{1}{q}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}$$

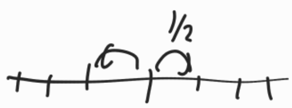
$q > \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{p}{q}\right) < 1$

$\sum_n \mu(n) < \infty \rightarrow$ chaîne récurrente positive.

(ii) $p = q = \frac{1}{2}$

(X_n) chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$

(S_n) marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$



$X_n = |S_n|$

X_n réversible : $C_{n,n+1} = 1 \quad \forall n$

$\mu(n) = 2$ si $n \geq 1$

$\mu(0) = 1$ → mesure invariante de masse infinie.

→ la chaîne n'est pas récurrente positive.

S_n est récurrente et $X_n = |S_n|$ est aussi récurrente

→ récurrente nulle. $\mathbb{E}_0(H_0) = \infty$

On avait calculé la loi de T_0 en partant de 1 par les martingales exponentielles

$H_0 = T_0 + 1$. $\mathbb{P}(T_0 \geq n) \sim \frac{c}{\sqrt{n}}$

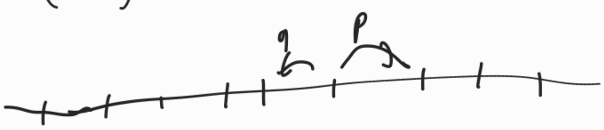
→ $\sum_n \mathbb{P}(T_0 \geq n) = \mathbb{E}(T_0) = \infty$

(iii) 

$p+q=1$

(X_n) $p > \frac{1}{2}$ la chaîne est réversible de mesure invariante $\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{q}$

soit (S_n) la marche aléatoire associée sur $\mathbb{Z}$



$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ (X_i) iid, $\mathbb{P}(X_i = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_i = -1)$

Loi des grands nombres $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[L^1]{p.s.} \mathbb{E}(X_i) = p - q > 0$

p.s., chaque état est visité un nombre fini de fois → la chaîne (S_n) est transitoire

$\mathbb{P}_0^{(S_n)}(H_0 = \infty) > 0 = \mathbb{P}_0^{(S_n)}(S_1 = 1)\, \mathbb{P}_1^{(S_n)}(H_0 = \infty) = p\, \mathbb{P}_1^{(S_n)}(H_0 = \infty)$

$$\mathbb{P}_1^{(S_n)}(H_0 = \infty) = \mathbb{P}_1^{(X_n)}(H_0 = \infty) > 0 \to (X_n) \text{ transitoire}$$

<u>Th</u> (X_n) récurrente irréductible. $x \in E$

(i) si (X_n) récurrente positive, $\forall \mu$ proba sur E, sous $\mathbb{P}_\mu$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{(X_k = x)} \xrightarrow[n \to \infty]{p.s.} \nu(x) \qquad \nu \text{ proba invariante}$$

(ii) si (X_n) récurrente nulle, $\forall \mu$ proba sur E, sous $\mathbb{P}_\mu$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{(X_k = x)} \xrightarrow[n \to \infty]{p.s.} 0$$