DM1:
Produit libre de groupes hyperboliques

à rendre le Mercredi 25 mars

Soient Γ_1 et Γ_2 deux groupes, dont on note l'opération par $\cdot$ et les éléments neutres par e_1 et e_2 respectivement. On note $\Gamma_1 * \Gamma_2$ le quotient de l'ensemble des mots finis sur l'alphabêt $\Gamma_1 \sqcup \Gamma_2$ par la relation d'équivalence engendrée par les *réductions* suivantes:

- $w_1 g h w_2 \sim w_1 (g \cdot h) w_2$, pour tous mots w_1, w_2 et tous $g, h \in \Gamma_i$,
- $w_1 e_i w_2 \sim w_1 w_2$ pour tous mots w_1, w_2.

Muni de l'opération de concaténation des mots, $\Gamma_1 * \Gamma_2$ forme un groupe (d'élément neutre le mot vide) appelé *produit libre* de Γ_1 et Γ_2. Via l'inclusion qui voit chaque élément de $\Gamma_1 \sqcup \Gamma_2$ comme un mot à une lettre, les groupes Γ_1 et Γ_2 s'identifient canoniquement à des sous-groupes de $\Gamma_1 * \Gamma_2$.

Le produit libre $\Gamma_1 * \Gamma_2$ vérifie la propriété universelle suivante: pour tout groupe G et tous morphismes $\varphi_1 : \Gamma_1 \to G$ et $\varphi_2 : \Gamma_2 \to G$, il existe un unique morphisme $\varphi : \Gamma_1 * \Gamma_2 \to G$ tel que $\varphi_{|\Gamma_i} = \varphi_i$.

Un *mot réduit* sur l'alphabêt $\Gamma_1 \sqcup \Gamma_2$ est un mot de la forme $g_1 \dots g_n$ où les g_i appartiennent alternativement à $\Gamma_1 - \{e_1\}$ et $\Gamma_2 - \{e_2\}$. On admettra que tout élément de $\Gamma_1 * \Gamma_2$ peut être représenté de façon unique par un mot réduit (l'élément neutre étant représenté par le mot vide).

Le but de ce devoir est de montrer que le produit libre de deux groupes hyperboliques est un groupe hyperbolique, et que le produit libre de deux groupes convexe-cocompacts est un groupe convexe-cocompact.

1 Produit libre de groupes hyperboliques

On considère ici tout graphe comme un graphe métrique dont les arêtes sont de longueur 1.

Soit $\mathcal{G}$ un graphe localement fini (i.e. chaque sommet possède un nombre fini de voisins). Étant donné V un sous-ensemble des sommets de $\mathcal{G}$, on note $\mathcal{G}(V)$ le graphe de sommets les éléments de V et tel que v_1 et $v_2 \in V$ sont reliés par une arête dans $\mathcal{G}(V)$ si et seulement s'il le sont dans $\mathcal{G}$.

1. On suppose que $\mathcal{G} = \mathcal{G}(V_1) \cup \mathcal{G}(V_2)$ où V_1 et V_2 s'intersectent en un unique point. Montrer que si $\mathcal{G}(V_1)$ et $\mathcal{G}(V_2)$ sont δ-hyperboliques, alors $\mathcal{G}$ est δ-hyperbolique.

2. On suppose que $\mathcal{G} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{G}(V_i)$, où pour tous $i, j \in I$, il existe $k \in I$ tel que $V_i \cup V_j \subset V_k$. Montrer que si chaque $\mathcal{G}(V_i)$ est δ-hyperbolique, alors $\mathcal{G}$ est δ-hyperbolique.

Soient Γ_1 et Γ_2 deux groupes de type fini. Soient S_1 et S_2 des parties génératrices finies symétriques de Γ_1 et Γ_2 respectivement. La réunion de S_1 et S_2 est une partie génératrice finie symétrique de $\Gamma_1 * \Gamma_2$, notée S. On considère maintenant $\mathcal{G}$ le graphe de Cayley $\mathcal{C}(\Gamma_1 * \Gamma_2, S)$.

3. Montrer que $\mathcal{G}(\Gamma_i)$ est isomorphe au graphe de Cayley $\mathcal{C}(\Gamma_i, S_i)$.

4. Montrer que l'inclusion $\mathcal{C}(\Gamma_i, S_i) \hookrightarrow \mathcal{G}$ est un plongement isométrique. En déduire que si $\Gamma_1 * \Gamma_2$ est hyperbolique, alors Γ_1 et Γ_2 sont hyperboliques.

On suppose maintenant que Γ_1 et Γ_2 sont hyperboliques.

5. Soit V_n le sous-ensemble de $\Gamma_1 * \Gamma_2$ formé des éléments qui s'écrivent comme produit d'au plus n éléments de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Montrer qu'il existe δ tel que $\mathcal{G}(V_n)$ est δ-hyperbolique pour tout n. En déduire que $\Gamma_1 * \Gamma_2$ est hyperbolique.

Indication: on pourra considérer, pour toute partie finie P de V_{n-1}, l'ensemble

$$V_n(P) = V_{n-1} \cup \bigcup_{g \in P} (g\Gamma_1 \cup g\Gamma_2) \ .$$

2 Un peu de géométrie hyperbolique

Soient x, y, z trois points de $\mathbb{H}^d$. On note $\angle_x(y, z)$ l'angle (entre 0 et π) formé au point x par les segments géodésiques $[x, y]$ et $[x, z]$.

Rappelons qu'un *hyperplan* de $\mathbb{H}^d$ est un sous-espace totalement géodésique de codimension 1. Le bord à l'infini d'un hyperplan est une sphère de codimension 1 dans $\partial_\infty \mathbb{H}^d$. On définit la distance entre deux hyperplans H_1 et H_2 par

$$d(H_1, H_2) = \inf_{x \in H_1, y \in H_2} d(x, y) \ .$$

6. Montrer que $d(H_1, H_2) = 0$ si et seulement si et seulement si les adhérences de H_1 et H_2 dans $\mathbb{H}^d \sqcup \partial_\infty \mathbb{H}^n$ s'intersectent.

7. Soient H_1 et H_2 deux hyperplans tels que $d(H_1, H_2) > 0$. Montrer qu'il existe $x \in H_1$ et $y \in H_2$ tels que $d(H_1, H_2) = d(x, y)$. Montrer que H_1 et H_2 sont orthogonaux au segment $[x, y]$.

8. Réciproquement, soient H_x et H_y les hyperplans orthogonaux à un segment $[x, y]$ en x et y respectivement. Montrer que $d(H_x, H_y) = d(x, y)$.

On dira qu'une suite d'hyperplans $H_0, \ldots, H_n$ est *ordonnée* si pour tout $1 \leq i \leq n-1$ les hyperplans H_{i-1} et H_{i+1} sont contenus dans deux composantes connexes distinctes de $\mathbb{H}^n - H_i$.

9. Soit $H_0, \ldots, H_n$ une suite d'hyperplans ordonnée. Montrer que

$$d(H_0, H_n) \geq \sum_{i=1}^{n} d(H_{i-1}, H_i) \ .$$

Soit $\alpha \in (0, \pi]$, on pose $l(\alpha) = \tanh^{-1}(\cos(\frac{\alpha}{2}))$. Soient x, y, z trois points distincts de $\mathbb{H}^n$ tels que $\angle_x(y, z) \geq \alpha$ et soit H_y (resp. H_z) l'hyperplan orthogonal au segment $[x, y]$ en y (resp. orthogonal à $[x, z]$ en z).

10. Montrer que si $d(x, y)$ et $d(x, z)$ sont supérieurs à $l(\alpha)$, alors H_1 et H_2 ne s'intersectent pas.

11. En déduire que si $d(x, y)$ et $d(x, z)$ sont supérieurs à $l(\alpha)$, alors

$$d(H_1, H_2) \geq d(x, y) + d(x, z) - 2l(\alpha) \ .$$

12. Soient $t_0 < t_1 < \ldots < t_n \in \mathbb{R}$ et soit $\varphi : [t_0, t_n] \to \mathbb{H}^n$ une application continue telle que $\varphi_{|[t_{i-1}, t_i]}$ est un segment géodésique (paramétré à vitesse 1) pour tout $1 \leq i \leq n$. On suppose que:

- $\angle_{\varphi(t_i)}(\varphi(t_{i-1}), \varphi(t_{i+1})) \geq \alpha$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$,
- $|t_i - t_{i-1}| \geq 4l(\alpha)$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Montrer que φ est une (C, D)-quasi-géodésique, pour des constantes C et D dépendant uniquement de α.

3 Produit libre de sous-groupes convexe-cocompacts

Soit Γ un sous-groupe convexe cocompact de $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^d)$. On suppose que Ω_Γ est non vide. On fixe ici un point base $o \in \mathbb{H}^d$.

13. Montrer qu'il existe $x \in \Omega_\Gamma$ dont le stabilisateur dans Γ est trivial.

14. Soit x_n une suite de points du rayon géodésique $[o, x)$ convergeant vers x. Montrer qu'il existe ε tel que, pour n assez grand, on a

$$\angle_o(x_n, \gamma \cdot x_n) > \varepsilon$$

pour tout $\gamma \in \Gamma$.

15. En déduire que, pour n assez grand, x_n satisfait les conditions suivantes:

(a) $\angle_{x_n}(o, \gamma \cdot x_n) \leq \pi/4$ pour tout $\gamma \in \Gamma - \{\mathrm{Id}\}$,

(b) $d(x_n, \gamma \cdot x_n) \geq l(\pi/2)$ pour tout $\gamma \in \Gamma - \{\mathrm{Id}\}$.

Soient maintenant Γ_1 et Γ_2 deux sous-groupes convexe-cocompacts de $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ tels que Ω_{Γ_1} et Ω_{Γ_2} sont non vides. Soient p_1 et p_2 deux points de $\mathbb{H}^n$ satisfaisant les conditions (a) et (b) ci-dessus pour Γ_1 et Γ_2 respectivement.

Soient a_1 et a_2 deux points de $\partial_\infty \mathbb{H}^n$ tels que la géodésique (a_1, a_2) passe par o. Soient g_1 et g_2 deux isométries de $\mathbb{H}^n$ telles que

- $g_i \cdot p_i = o$, $i = 1, 2$,
- $g_i \cdot o$ appartient au rayon géodésique $[o, a_i)$, $i = 1, 2$.

Enfin, posons $\Gamma'_i = g_i \Gamma_i g_i^{-1}$.

16. Montrer pour tous $(\gamma_1, \gamma_2) \in (\Gamma'_1 - \{\mathrm{Id}\}) \times (\Gamma'_2 - \{\mathrm{Id}\})$, on a

$$\angle_o(\gamma_1 \cdot o, \gamma_2 \cdot o) \geq \frac{\pi}{2} \ .$$

17. Montrer que $\Gamma'_1 \cup \Gamma'_2$ engendre un sous-groupe quasi-isométriquement plongé de $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^d)$ isomorphe au produit libre $\Gamma_1 * \Gamma_2$.