DM2:
Domaines de discontinuités pour les représentations Anosov

Le but de ce DM est d'associer à certains groupes Anosov Γ un domaine de disconinuité de l'espace projectif sur lequel Γ agit proprement discontinûment et cocompactement. Il s'agit d'un cas particulier de résultats de Guichard–Wienhard généralisés ensuite par Kapovich–Leeb–Porti.

Soit V un espace vectoriel réel de dimension $d \geq 2$. On désigne par $\mathbf{P}(V)$ l'espace projectif de V, et par $\mathrm{Grass}_i(V)$ la Grassmanienne des i-plans de V. Dans tout le problème, on considère un sous-groupe P_k-Anosov Γ de $\mathrm{SL}(V)$, avec $1 \leq k \leq \frac{d}{2}$. Dans les parties 3 et 4, on suppose en outre que $d = 2k$.

On note $\xi : \partial_\infty \Gamma \to \mathrm{Grass}_k(V)$ et $\xi^* : \partial_\infty \Gamma \to \mathrm{Grass}_{d-k}(V)$ les applications de bord associées. Suivant le contexte, on verra $\xi(x)$ (resp. $\xi^*(x)$) comme un sous-espace vectoriel de V de dimension k (resp. $d-k$), ou comme un sous-espace projectif de $\mathbf{P}(V)$ de dimension $k-1$ (resp. $d-k-1$).

Soit (X, d) un espace métrique géodésique, propre et δ-hyperbolique sur lequel Γ agit proprement discontinûment et cocompactement par isométries.[1] Étant donnés deux points distincts a et b de $\partial_\infty X = \partial_\infty \Gamma$ et $x \in X$, on notera

$$d(x, (a, b)) \leq K$$

s'il existe une géodésique dans X d'extrémités a et b et un point y sur cette géodésique tel que $d(x, y) \leq K$.

On fixe un point base o de X, et on se donne une fonction continue Γ-équivariante

$$x \mapsto q_x$$

de X vers l'espace des produits scalaires de déterminant 1 sur V. Dans tout le problème, on utilise q_o comme un "produit scalaire de référence" sur V.[2]

[1] Le choix de X importe peu, et vous pouvez supposer si cela vous arrange que X est le graphe de Cayley associé à une partie génératrice finie symétrique.

[2] Vous pouvez si vous le souhaitez utiliser la notation $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pour le produit scalaire q_o et $\| \cdot \|$ pour la norme associée.

1 Distance projective

Le produit scalaire q_o permet de munir $P(V)$ d'une distance d_o, telle que $d_o([v],[w])$ est la valeur entre 0 et $\pi/2$ de l'angle formé par $[v]$ et $[w]$:

$$d_o([v],[w]) = \arccos\left(\frac{|q_o(v,w)|}{\sqrt{q_o(v,v)q_o(w,w)}}\right) .$$

Si z est un point de $\mathbf{P}(V)$ et F un fermé de $\mathbf{P}(V)$, on note

$$d_o(z,F) = \inf_{y\in F} d_o(z,y) .$$

1. Soit $K \geq 0$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $a \neq b \in \partial_\infty\Gamma$ tels que $d(o,(a,b)) \leq K$, pour tout $v \in \xi(a)$ et tout $w \in \xi^*(b)$, on a

$$q_0(v,w) \leq (1-\eta)\sqrt{q_0(v,v)}\sqrt{q_0(w,w)} .$$

2. En déduire l'existence d'une constante $C > 1$ et d'un $\varepsilon > 0$ tel que, pour tous $v \in \xi(a)$ et $w \in \xi^*(b)$, si

$$d_o([v+w],\xi(a)) \leq \varepsilon) ,$$

alors

$$\frac{1}{C}\sqrt{\frac{q_o(w,w)}{q_o(v,v)}} \leq d_o([v+w],\xi(a)) \leq C\sqrt{\frac{q_o(w,w)}{q_o(v,v)}} .$$

2 Dynamique Nord-Sud généralisée

On considère une suite $(\gamma_n) \in \Gamma^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\gamma_n \cdot o \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \in \partial_\infty\Gamma \quad \text{et} \quad \gamma_n^{-1} \cdot o \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b \in \partial_\infty\Gamma .$$

(Attention: on ne suppose pas que $a \neq b$.)

Le but de cette section est de démontrer la proposition suivante:

Proposition 2.1. *Pour tout $[u] \in \mathbf{P}(V)$, si $[v] \notin \xi^*(b)$, alors*

$$d_o(\gamma_n \cdot [u], \xi(a)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

Soit $c \in \partial_\infty\Gamma$ un point distinct de a et $d \in \partial_\infty\Gamma$ un point distinct de b.[3]

[3] Le choix des points c et d n'a pas d'importance. Vous pouvez leur ajouter des contraintes supplémentaires si cela vous est utile.

3. Montrer qu'il existe une constante A telle que, pour n assez grand,

$$d(o,(c,\gamma_n\cdot d))\leq A \quad \text{et} \quad d(\gamma_n\cdot o,(c,\gamma_n\cdot d))\leq A\ .$$

Soit u un vecteur de $V\backslash\xi^*(b)$.

4. Montrer qu'il existe $r>0$ tel que, pour tout n assez grand, u se décompose sous la forme

$$u=v_n+w_n\ ,$$

où $v_n\in\xi(d)$, $w_n\in\xi^*(\gamma_n^{-1}\cdot c)$ et

$$\frac{q_o(v_n,v_n)}{q_o(w_n,w_n)}\geq r\ .$$

5. Montrer qu'il existe des constantes $C,\alpha>0$ telles que

$$\frac{q_o(\gamma_n v_n,\gamma_n v_n)}{q_o(\gamma_n w_n,\gamma_n w_n)}\geq Cre^{\alpha d(o,\gamma_n\cdot o)}\ .$$

6. Conclure que

$$d_o(\gamma_n\cdot[u],\xi(a))\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0\ .$$

3 Ensemble limite épaissi

On suppose maintenant que $d=2k$, de sorte que $k=d-k$ et $\xi=\xi^*$. On définit l'"ensemble limite épaissi"[4] Λ_Γ de Γ dans $\mathbf{P}(V)$ par

$$\Lambda_\Gamma=\bigcup_{a\in\partial_\infty\Gamma}\xi^*(a)\ .$$

7. Montrer que Λ_Γ est compact et Γ-invariant.

8. Justifier l'existence d'une application continue Γ-equivariante

$$\pi:\Lambda_\Gamma\to\partial_\infty\Gamma$$

telle que

$$\pi^{-1}(x)=\xi(x)$$

pour tout $x\in\partial_\infty\Gamma$.

Soit a un point de $\partial_\infty\Gamma$. Choisissons $g_a:\mathbb{R}_+\to X$ un rayon géodésique de o à a, et posons $x_n=g_a(n)$.

[4] Terminologie introduite par Kapovich–Leeb–Porti.

9. Montrer qu'il existe une constante B et une suite $(\gamma_n) \in \Gamma^{\mathbb{N}}$ telle que

$$d(o, \gamma_n \cdot x_n) \leq B \ .$$

Soit c un point de $\partial_\infty \Gamma$ distinct de a.[5]

10. Montrer l'existence d'une constante K et d'une suite de voisinages U_n de a tels que pour tout $a' \in U_n$,

$$d(o, (c, a')) \leq K \quad \text{et} \quad (o, (\gamma_n \cdot c, \gamma_n \cdot a')) \leq K \ .$$

Soit u un vecteur de V. Soit $a' \in U_n$. Décomposons u sous la forme $u = v + w$, où $v \in \xi(a')$ et $w \in \xi(c)$.

11. Montrer qu'il existe des constantes positives C et α telles que

$$\frac{q_o(\gamma_n w, \gamma_n w)}{q_o(\gamma_n v, \gamma_n v)} \geq C e^{\alpha n} \frac{q_o(w, w)}{q_o(v, v)} \ .$$

12. En déduire le lemme suivant:

Lemma 3.1. *Pour tout $a \in \partial_\infty \Gamma$, il existe un voisinage E de $\xi(a)$ dans $\mathbf{P}(V)$ et un élément $\gamma \in \Gamma$ tel que, pour tout $[v]$ dans E et tout $a' \in \partial_\infty \Gamma$ tel que $\xi(a') \subset E$, on a*

$$d_o(\gamma \cdot v, \gamma \cdot \xi(a')) \geq 3\, d_o(v, \xi(a'))$$

4 Domaine de discontinuité

Soit Ω_Γ le complémentaire de Λ_Γ dans $\mathbf{P}(V)$.

13. Montrer que Γ agit proprement discontinûment sur Ω.

14. Soit $(z_n) \in \Omega_\Gamma^{\mathbb{N}}$ telle que

$$d_o(z_n, \Lambda_\Gamma) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \ .$$

Montrer que pour n assez grand, il existe $\gamma_n \in \Gamma$ tel que

$$d_o(\gamma_n \cdot z_n, \Lambda_\Gamma) \geq 2 d_o(z_n, \Lambda_\Gamma) \ .$$

15. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $z \in \Omega_\Gamma$, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que

$$\mathrm{d}_o(\gamma \cdot z, \Lambda_\Gamma) \geq \varepsilon \ .$$

16. Conclure que Γ agit cocompactement sur Ω_Γ.

[5] Le choix du point c n'a pas d'importance. Vous pouvez lui ajouter des contraintes supplémentaires si cela vous est utile.