Théorème de Malcev, lemme de Selberg

Exercice 1. Soit Γ un sous-groupe de type fini de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Le but de cet exercice est de démontrer le *théorème de Malcev* et le *lemme de Selberg*:

Théorème de Malcev. *Pour tout $g \in \Gamma \backslash \{\mathrm{Id}\}$, il existe Γ' d'indice fini dans Γ tel que $g \notin \Gamma'$. (On dit que Γ est* résiduellement fini.*)*

Lemme de Selberg. *Il existe Γ' d'indice fini dans Γ tel que pour tout $g \in \Gamma' \backslash \{\mathrm{Id}\}$ et tout $k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$, on a $g^k \neq \mathrm{Id}$. (On dit que Γ' est* sans torsion.*)*

1. Montrer que Γ se plonge dans $\mathrm{GL}(n, F)$, où F est une extension de degré $d < \infty$ de $K = \mathbb{Q}(X_1, \ldots, X_k)$. En déduire que Γ se plonge dans $\mathrm{GL}(dn, K)$.

2. Montrer que Γ est contenu dans $\mathrm{GL}(dn, A)$, où $A = \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_k, \frac{1}{f}]$ pour un certain $f \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_k]$.

3. Soit p un nombre premier tel que $f \neq 0 \mod p$. Notons F_p le corps à p éléments et $\overline{f}$ la réduction de f modulo p. Rappeler pourquoi il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ algébriques sur F_p tels que $\overline{f}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \neq 0$. En déduire l'existence d'un morphisme d'anneaux

$$\varphi : A \to F_p[\alpha_1, \ldots, \alpha_k] \ .$$

On note également φ le morphisme induit de $\mathrm{GL}(dn, A)$ dans $\mathrm{GL}(dn, F_p[\alpha_1, \ldots, \alpha_k])$.

5. Démontrer que théorème de Malcev.

Posons $\Gamma' = \Gamma \cap \ker \varphi$.

6. Montrer que Γ' est d'indice fini dans Γ.

Soit $g \in \Gamma'$ tel que $g^l = \mathrm{Id}$ pour un certain $l \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$.

7. Montrer que $|\mathrm{Tr}(g)| \leq dn$.

8. Montrer que $\varphi(\mathrm{Tr}(g)) = \mathrm{Tr}(\varphi(g)) = dn$.

9. Démontrer le lemme de Selberg.

Exercice 2. Soit Γ un réseau uniforme sans torsion de $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^d)$. On suppose qu'il existe un hyperplan géodésique P tel que $\Gamma \cap H$ est un réseau uniforme de H, où H désigne le stabilisateur de P dans $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^d)$. Le but de cet exercice est de démontrer le théorème suivant:

Theorem 0.1. *Il existe Γ' d'indice fini dans Γ tel que l'application*

$$(\Gamma' \cap H)\backslash P \to \Gamma'\backslash \mathbb{H}^d$$

(quotient de l'inclusion $P \hookrightarrow \mathbb{H}^d$) est un plongement.

Posons $\Gamma_H = \Gamma \cap H$ et définissons

$$A_H = \{g \in \Gamma \mid g \cdot P \cap P \neq \emptyset\} \ .$$

1. Montrer que A_H est invariant par multiplication à gauche et à droite par Γ_H.

2. Montrer que $A_H = \Gamma_H$ si et seulement si l'application $\Gamma_H\backslash P \to \Gamma\backslash\mathbb{H}^d$ est un plongement.

3. Si $\Gamma_H \subsetneq A_H$, montrer qu'il existe $g_1, \ldots, g_n \notin \Gamma_H$ tels que

$$A_H = \Gamma_H \sqcup \bigsqcup_{i=1}^{n} \Gamma_H g_i \Gamma_H \ .$$

Notons σ la réflexion par rapport à l'hyperplan P.

4. Montrer que $g \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^d)$ commute avec σ si et seulement si $g \in H$.

Soit $\hat{\Gamma}$ le sous-groupe de $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^d)$ engendré par Γ et σ. Rappelons que le *commutateur* de g et h est l'élément $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$.

5. Montrer qu'il existe un sous-groupe distingué $\hat{\Gamma}'$ de $\hat{\Gamma}$ tel que $[g_i, \sigma] \notin \hat{\Gamma}'$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Posons $\Gamma' = \hat{\Gamma}' \cap \Gamma$.

6. Montrer que $\hat{\Gamma}' \cap A_H \subset H$.

7. Conclure.