Déformations de sous-groupes convexe-cocompacts

Γ groupe de type fini, G groupe de Lie.

$\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ muni de la topologie de la convergence simple.

Prop : $\rho_n \xrightarrow[\text{cvs}]{} \rho \iff \rho_n|_S \longrightarrow \rho|_S$
où S partie génératrice finie.

$$\mathrm{Hom}(\Gamma, G) \hookrightarrow G^S$$
$$\rho \longmapsto (\rho(s))_{s \in S}$$

Rmq : $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ sous-ensemble analytique de G^S.

$\Longrightarrow \mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ localement connexe par arcs.

Def : $\rho : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^d)$ est un plongement quasi-isométrique s'il existe $C, D > 0$ telles que $\boxed{d(\rho(\gamma).o, o) \geq \frac{1}{C}|\gamma|_S - D}$

pour tout $\gamma \in \Gamma$.

Rmq : ρ plongement q.i.

$\iff \exists\, \varphi : \mathcal{C}(\Gamma, S) \longrightarrow \mathbb{H}^d$

plongement quasi-isom. ρ-équiv.

$\iff \ker \rho$ est fini et

$\mathrm{im}\, \rho$ est un sous-groupe convexe-cocompact

Théorème :

$\{\rho \text{ plongements q.i.}\}$ ouvert de $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^d))$

Rmq : On pourrait remplacer $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^d)$ par $\mathrm{Isom}(X)$, X δ-hyp. et notamment pour G de rang 1.

(X, d_X) espace δ-hyperbolique, (Y, d_Y) géodésique

Def : $\varphi : Y \longrightarrow X$ est (C, D, L)-localement quasi-isométrique si

$$\frac{1}{C} d(x,y) - D \leq d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq C d(x,y) + D$$

pour tous x, y tq $d(x,y) \leq L$.

Def : $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow X$ est une (C, D, L)-quasi-géodésique locale si elle est (C, D, L)-localement q.i.

Lemme local-global : Pour tous (C, D), il existe $C' \geq C$, $D' \geq D$ et $L(C, D, \delta)$ tels que si $\varphi : Y \longrightarrow X$ (C, D, L)-localement q.i., alors φ est (C', D')-q.i.

Rmq : il suffit de le démontrer pour $Y = \mathbb{R}$.

On va le prouver pour $X = \mathbb{H}^d$ (preuve générale dans Ghys - de la Harpe)

en admettant :

<u>Proposition</u> : pour tout $\alpha \in (0, \pi]$, il existe $\lambda > 0$, $C, D > 0$ tels que pour tout $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{H}^d$ géodésique par morceaux, $(t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ tq $\varphi|_{[t_i, t_{i+1}]}$ segment géodésique, si :

* $|t_i - t_{i+1}| \geq \lambda$
* $\widehat{\varphi(t_{i-1})\varphi(t_i)\varphi(t_{i+1})} \geq \alpha$.

Alors φ est une (C, D)-quasi-géodésique

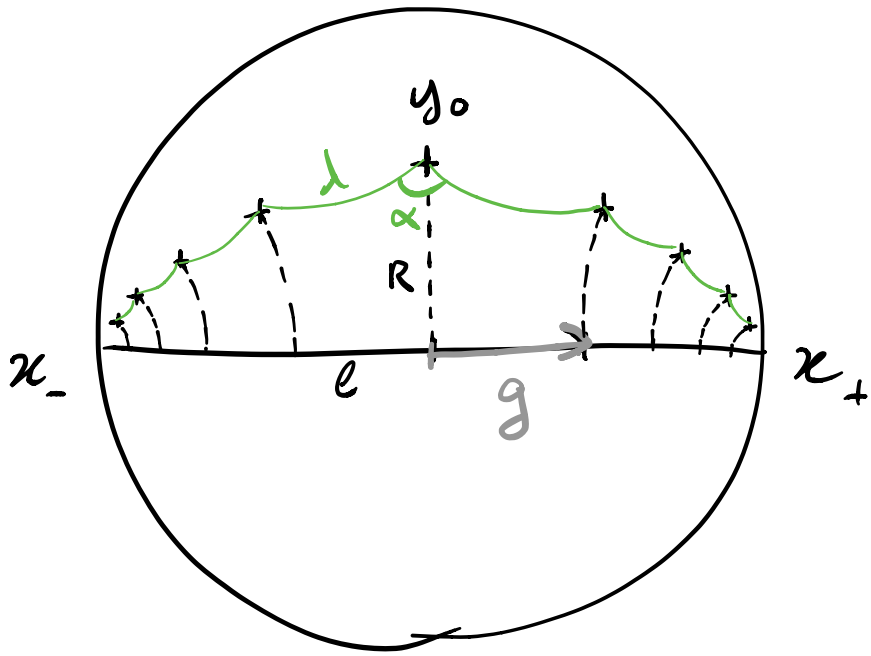
<u>Preuve</u> : DM1, Partie 2

<u>Exemple</u> : y_0 à distance R de (x_-, x_+),

g translation de longueur ℓ le long de (x_-, x_+)

$$y_k = g^k y_0 .$$

On a : $d(y_k, y_{k+1}) = \lambda(\ell, R)$, $\widehat{y_{k-1} y_k y_{k+1}} = \alpha(\ell, R)$



Preuve du lemme local-global pour $\mathbb{H}^d$:

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{H}^d$ (C,D,L) quasi-géodésique locale.

Posons $x_k = \varphi\left(\frac{kL}{2}\right)$

ψ géodésique par morceaux, $\psi(t_k) = x_k$,

$\psi_{|[t_k, t_{k+1}]}$ segment géodésique.

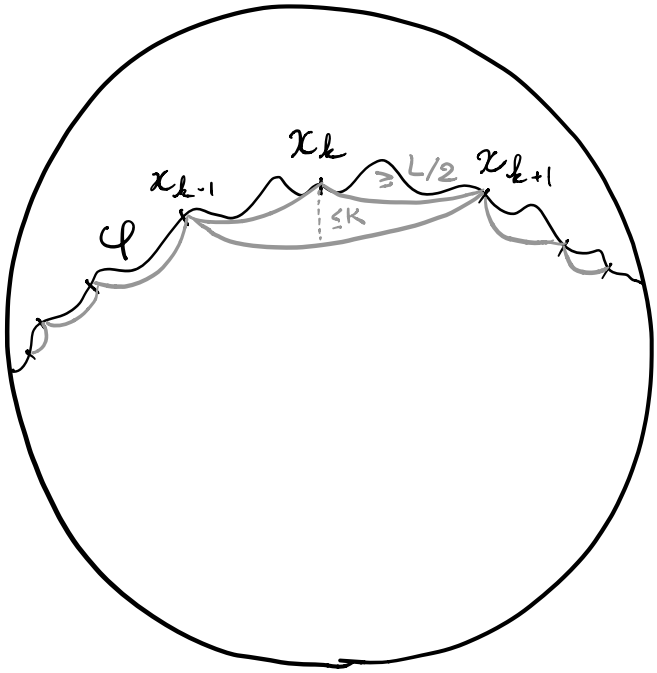
1. φ est L-local^t q.i.

$$d(x_k, x_{k+1}) \geq \frac{1}{C}\left(\frac{L}{2}\right) - D$$

2. $\widehat{x_{k-1}\, x_k\, x_{k+1}} \simeq e^{-d(x_k, [x_{k-1}, x_{k+1}])}$

3. Lemme de Morse $\Rightarrow \exists K$ indep. de L telle que $d(x_k, [x_{k-1}, x_{k+1}]) \leq K$.

$$\Rightarrow \quad \widehat{x_{k-1}\, x_k\, x_{k+1}} \geq \alpha > 0$$



Proposition $\Rightarrow$ pour L assez grand, ψ est une quasi-géod.

Lemme de Morse $\Rightarrow d_{Haus}(\varphi, \psi) \leq K$

$\Rightarrow \varphi$ est une quasi-géod. $\square$

Preuve du théorème :

$\rho : \Gamma \to \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^d)$ plongement q.i.

$\varphi_\rho : \mathcal{C}(\Gamma, S) \to \mathbb{H}^d$ ρ-équivariante,

géodésique sur les arêtes,

$$\varphi_\rho(\gamma) = \rho(\gamma) \cdot o$$

φ_ρ est un plongement (C, D)-q.i.

$$\frac{1}{C}|\gamma|_S - D \leq d(o, \rho(\gamma) \cdot o) \leq C|\gamma|_S + D$$

Pour tout $L > 0$ il existe U voisinage de ρ dans $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ tq si $\rho' \in U$

$$\frac{1}{C}|\gamma|_S - D - 1 \leq d(o, \rho'(\gamma) \cdot o) \leq C|\gamma|_S + D + 1$$

pour $|\gamma|_S \leq L$.

$$\frac{1}{C}|\gamma^{-1}\eta|_S - D - 1 \leq d(\rho'(\gamma).o, \rho'(\eta).o) \leq C|\gamma^{-1}\eta|_S + D + 1$$

$$\| $$

$$d(o, \rho'(\gamma^{-1}\eta).o)$$

dès que $|\gamma^{-1}\eta|_S = d(\gamma, \eta) \leq L$

Donc $\varphi_{\rho'}$ est $(C, D+1, L)$-local^t q.i.

Pour U suffisamment petit, L est suffisamment grand,

Lemme local-global $\Rightarrow$ $\varphi_{\rho'}$ est q.i.

$\Rightarrow$ ρ' est un plongement q.i

$\square$

<u>Question</u> : quels groupes se déforment ?

Déformations explicites :

Rmq : $\rho : \Gamma \to G$

$g\rho g^{-1} : \gamma \mapsto g\rho(\gamma)g^{-1}$

déformations "triviales"

Def : ρ est (local^t) rigide si $\exists\, U$ voisinage de ρ dans $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ tel que $\forall \rho' \in U, \exists g \in G$ tq $\rho' = g\rho g^{-1}$.

Rmq : "plongement q.i." stable par conjugaison

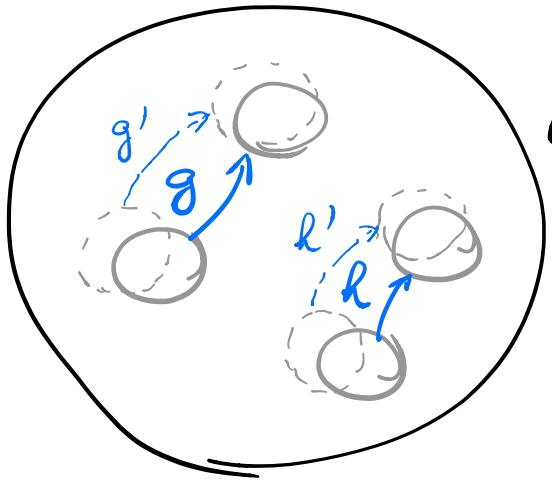
Exemples de représentations convexe-cocompactes non rigides :

* $\rho : \pi_1(\Sigma_g) \to \mathrm{Isom}(H^2)$

ρ n'est pas rigide puisque

$$\{\text{Fuchsiennes}\}/_{\text{conjugaison}} \simeq \mathrm{Teich}(\Sigma_g) \underset{\text{homeo}}{\simeq} \mathbb{R}^{6g-6}$$

* Les groupes de Schottky :



$$\mathrm{Hom}(F_n, G) \simeq G^n$$

« $\mathrm{Hom}(F_n, G) / \text{conjugaison}$ de dimension $(n-1)\dim G$. »

Théorème (Mostow) : Γ réseau de $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^d)$, $d \geq 3$.

$\rho : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^d)$ injective d'image discrète

Alors ρ est conjuguée à $i : \Gamma \hookrightarrow \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^d)$

($\Rightarrow$ les réseaux hyperboliques uniformes sont rigides en dim ≥ 3).

En revanche certains réseaux Γ de $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^d)$ ont des déformations non triviales dans $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^{d'})$, $d' > d$.

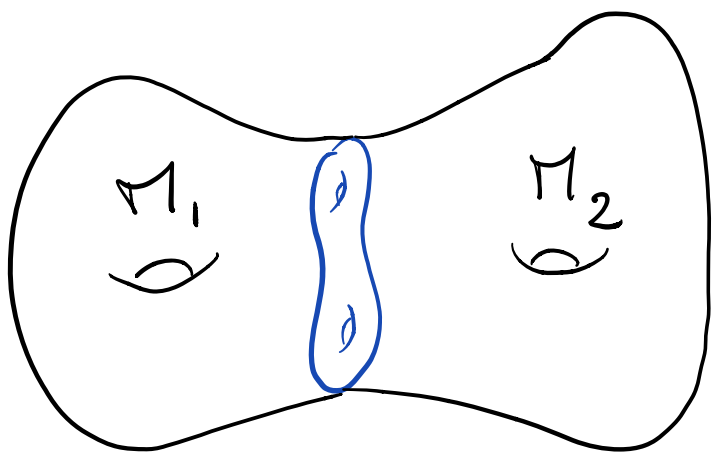
(Johnson - Millson)

Déformations de Johnson-Millson :

$M = \Gamma \backslash \mathbb{H}^d$ variété hyperbolique compacte,
$S \subset M$ hypersurface géodésique plongée, compacte, connexe.

On suppose que $M \backslash S$ a deux composantes connexes M_1, M_2 variétés à bord S.

$M = M_1 \sqcup M_2 / S$



Théorème (Van Kampen) :

$$\Gamma = \pi_1(M_1) \underset{\pi_1(S)}{*} \pi_1(M_2) \text{ (produit amalgamé)}$$

$$= \pi_1(M_1) * \pi_1(M_2) \Big/ \begin{matrix} \gamma_1 = \gamma_2 \\ \gamma \in \pi_1(S) \end{matrix}$$

Propriété universelle du produit amalgamé :

$\forall \rho_i : \pi_1(M_i) \longrightarrow G$ tq $\rho_1|_{\pi_1(S)} = \rho_2|_{\pi_1(S)}$

$\exists! \rho : \Gamma \longrightarrow G$ tq $\rho|_{\pi_1(M_1)} = \rho_1$

$\rho|_{\pi_1(M_2)} = \rho_2$

Construction de Johnson-Millson :

$\rho : \Gamma \underset{\text{inclusion}}{\hookrightarrow} \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^d) \hookrightarrow \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^{d+1})$

$\rho_1 = \rho|_{\pi_1(M_1)}$ $\quad \rho_2 = \rho|_{\pi_1(M_2)}$

$\rho_1' = \rho_1$ $\quad \rho_2' = g \rho_2 g^{-1}$, g commute avec $\rho(\pi_1(S))$

ρ' tq $\rho'|_{\pi_1(M_i)} = \rho_i'$

$\hookrightarrow$ c'est ma déformation (pour g proche de Id

elle est triviale si g commute avec $\rho(\pi_1(M_2))$

On veut que

$$\{g \mid g\rho(\gamma)g^{-1} = \rho(\gamma) \text{ pour } \gamma \in \pi_1(S)\}$$

$= \mathrm{Com}(\pi_1(S))$ soit "plus gros"

que $\mathrm{Com}(\pi_1(M_2))$

<u>Faits</u> :

$\rho(\pi_1(M_2))$ Zariski dense dans $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^d)$

$\Rightarrow \mathrm{Com}(\pi_1(M_2)) = \mathrm{Com}(\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^d))$

$= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (réflexion sur $\mathbb{H}^d$)

$\rho(\pi_1(S))$ Zariski dense dans $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^{d-1})$

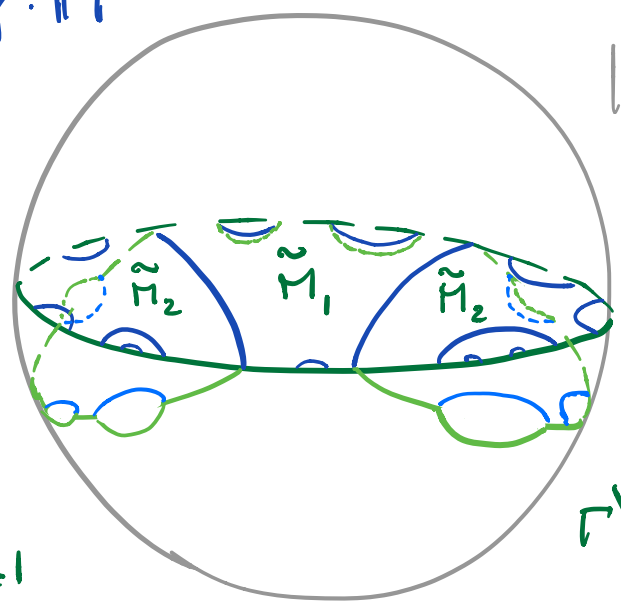
$\Rightarrow \mathrm{Com}(\pi_1(S)) = \mathrm{Com}(\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^{d-1}))$

$\supset S^1$ (rotations autour de $\mathbb{H}^{d-1}$)

à indice fini près, c'est une égalité si $d \geq 3$.

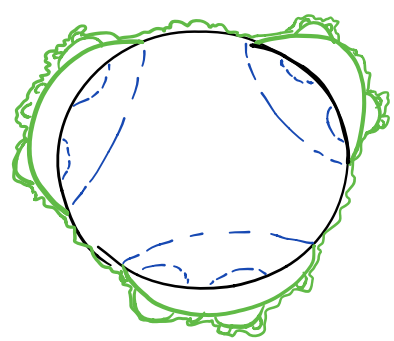
Interprétation géométrique de Johnson-Millson:

$\pi^{-1}(S) = \bigsqcup \gamma \cdot \mathbb{H}^{d-1}$

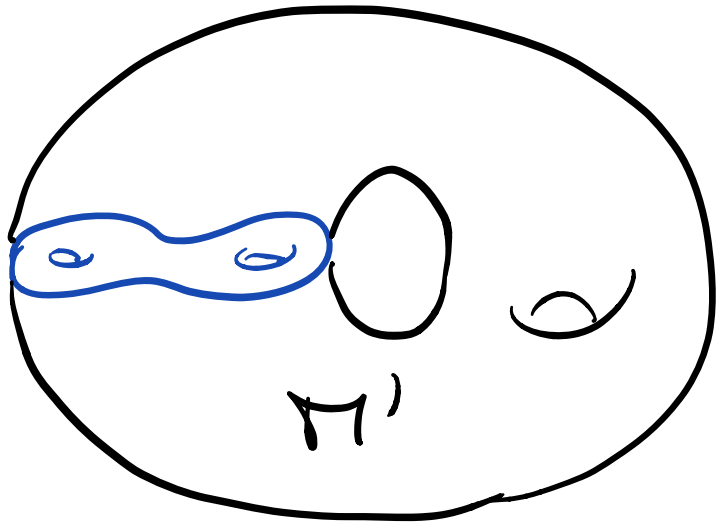


$$\begin{array}{c} \mathbb{H}^d = \tilde{M} \\ \downarrow \pi \\ \Gamma \backslash \mathbb{H}^d = M \end{array}$$

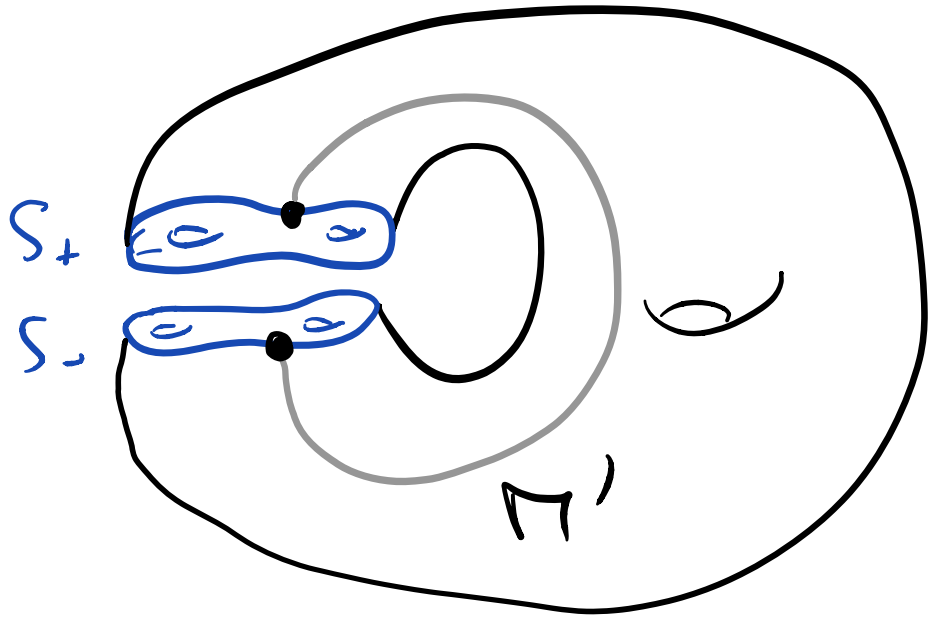
$\mathbb{H}^d \hookrightarrow \mathbb{H}^{d+1}$
totalement géodésique, ρ-équivariant,
se déforme en
$\mathbb{H}^d \hookrightarrow \mathbb{H}^{d+1}$
géodésique par morceaux, ρ'-équiv.,
"plié" le long de $\pi^{-1}(S)$



Cas où S ne sépare pas M :



$$M = M' / S_+ = S_-$$



$\pi_1(M)$ <u>extension HNN</u> :

$$\pi_1(M) = \pi_1(M') * \langle t \rangle \Big/ \pi_1(S_+) = t\,\pi_1(S_-)\,t^{-1}$$

<u>Johnson-Millson</u> :

$\rho : \pi_1(M) \hookrightarrow \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^d) \hookrightarrow \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^{d+1})$

ρ' telle que $\rho'|_{\pi_1(M')} = \rho|_{\pi_1(M')}$

$\rho'(t) = \rho(t)\,g$ où $g \in \mathrm{Com}(\pi_1(S))$

L'interprétation géométrique est la même.