Chapitre III : Groupes et représentations Anosov

$\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^d) \rightsquigarrow G$ groupe de Lie (semi-simple)

$\cong$

$\mathrm{Isom}(G/K)$, G/K espace symétrique de courbure ≤ 0.

Pour nous $G = SL(d, \mathbb{R})$

<u>Problème</u> : Si $\mathrm{rang}_{\mathbb{R}}(G) \geq 2$, G/K n'est pas δ-hyp.

* $\Gamma \subset G$ plongé q.i. bien défini, mais trop faible (pas stable par déformations)

* Γ convexe cocompact dans G/K bien défini aussi, mais trop fort (<u>Quint</u> : ça implique que Γ réseau dans G.)

Historique :

2006 : Labourie définit $\rho : \Gamma \to G$ Anosov

pour Γ réseau uniforme d'un groupe de Lie de rang 1,

Stabilité, ensembles finites.

Anosov $<$ dynamique hyperbolique,

flot géodésique de $\Gamma \backslash \mathbb{H}^d$ est un flot d'Anosov.

Guichard - Wienhard (2012) : généralisation pour Γ

Gromov - hyperbolique (utilise un "flot géodesique" d'un groupe hyperbolique (Mineyev))

domaines de discontinuités.

Guéritaud - Guichard - Kassel - Wienhard,

Kapovich - Leeb - Porti ($\simeq$ 2016)

caractérisation plus géométrique (cf cours)

KLP : Γ hyperbolique est une conséquence

Bochi - Potrie - Sambarino (2019) : reprennent KLP avec plus de liens vers la dynamique.

Danciger - Guéritaud - Kassel (2018) :

Anosov $\Longleftrightarrow$ notion de convexe-cocompacité dans un espace projectif. (cf. Crampon - Marquis)

Rmq : $SL(d,\mathbb{R})$ admet plusieurs sous-groupes paraboliques

$$P_k = \mathrm{Stab}(\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^d) = \begin{pmatrix} \overset{k}{\overleftrightarrow{\begin{matrix} * & * \\ & * \end{matrix}}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$SL(d,\mathbb{R})/P_k = \mathrm{Grass}(k,d)$$

Propriété Anosov : relative à un choix de P_i

1) Groupes P_1-Anosov :

Ici $G = SL(V)$, $V = \mathbb{R}^d$, $\langle \cdot , \cdot \rangle$ produit scalaire canonique

$K = SO(q_0)$ $\quad$ q_0 forme quadratique associée.

sous-groupe compact maximal de G.

$$G/K \cong \{q \text{ f.q. définies positives}\} / \mathbb{R}_+^* = \Omega \subset P(\mathrm{Sym}^2(V^*))$$

$$G/K \longrightarrow \Omega$$

$$gK \longrightarrow q_0 \circ g^{-1}$$

Projection de Cartan :

$$\mu : G/K \longrightarrow \overbrace{\{(u_1, \dots, u_d),\ u_1 \geq \dots \geq u_d,\ \textstyle\sum u_i = 0\}}^{\text{chambre de Weyl de } SL(d,\mathbb{R})}$$

$\mu(g) = (\mu_1(g), \dots, \mu_d(g))$ tel que

$$\underbrace{g = k_1 \begin{pmatrix} e^{\mu_1(g)} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\mu_d(g)} \end{pmatrix} k_2}_{\text{Décomposition de Cartan de } g.}, \quad k_1, k_2 \in K.$$

Rmq : décomposition de Cartan < décomposition polaire

$$g = k s \quad , \quad s = k' d k'^{-1}$$

$$g = k k' d k'^{-1}$$

2 interprétations :

* $q_0 \circ g(.,.) = q_0(g.,g.)$

$$= q_0\left(k_2^{-1}(\diagdown)k_2, k_2^{-1}(\diagdown)k_2\right)$$

⚠ $g \cdot q_0 = q_0 \circ g^{-1}$

* $\mathcal{E}_{g.q_0} = \{ v \text{ tq } g.q_0(v) \leq 1 \}$

$$= \{ v \text{ tq } q_0(g^{-1}v) \leq 1 \}$$

$$= g.\mathcal{E}_{q_0} \quad e^{\mu_1(g)}, \dots, e^{\mu_d(g)}$$

longueurs des axes de $g.\mathcal{E}_{q_0}$ par rapport à q_0.

Distance vectorielle sur G/K :

$$\vec{d}(q_0, g\cdot q_0) = (\mu_1(g), \dots, \mu_d(g))$$

$$\vec{d}(q_1, q_2) := (\mu_1(g_1^{-1} g_2), \dots, \mu_d(g_1^{-1} g_2))$$

où $q_1 = g_1 \cdot q_0$, $q_2 = g_2 \cdot q_0$

Propriétés :

* $\vec{d}$ G-invariante.
* $\vec{d}(q_1, q_2) = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \iff$

  $q_1 = q_2(\cdot, A\cdot)$, A conjuguée à $\begin{pmatrix} e^{2\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{2\alpha_d} \end{pmatrix}$
* $\vec{d}$ "classifie" $G\backslash(G/K \times G/K)$:

$$\vec{d}(q_1, q_2) = \vec{d}(q_3, q_4)$$

$$\iff \exists g \text{ tq } g\cdot q_1 = q_3,\ g\cdot q_2 = q_4$$

* $d_2(q_1,q_2) := \|\vec{d}(q_1,q_2)\|_2$ distance associée à une métrique riemannienne G-inv.

* $d_\infty(q_1,q_2) := \|\vec{d}(q_1,q_2)\|_\infty$
$= \log \inf \{ C \text{ tq } \frac{1}{C} q_1 \leq q_2 \leq C q_1 \}$

distance associée à une métrique finslérienne G-invariante.

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\text{Def}} : \Gamma \subset G \text{ de type fini est } P_1\text{-Anosov} \\ \text{s'il existe } C, D \text{ telles que } \forall g \in \Gamma, \\ \frac{1}{C}|g|_S - D \leq \mu_1(g) - \mu_2(g) \leq C|g|_S + D \end{array}}$$

<u>Rmq</u> : P_1-Anosov $\Longrightarrow$ quasi-isométriquement plongé

i.e. $\|\mu(g)\|_2 = d_{Rim.}(q_0, g^{-1}.q_0) \geq \frac{1}{C}|g|_S - D$

Théorème (KLP) : Si $\Gamma \subset SL(n, \mathbb{R})$ est P_1-Anosov, alors

1) Γ est Gromov-hyperbolique

2) Il existe $\xi : \partial_\infty \Gamma \longrightarrow P(V)$

$$\xi^* : \partial_\infty \Gamma \longrightarrow P(V^*) \simeq \{\text{Hyperplans de } V\}$$

Γ-équivariantes, continues, injectives, transverses

Transverses : $\xi(x) \subset \xi^*(y)$ si et seulement si $x = y$.

Dans ce cours, on admet 1).

Exemple : $\Gamma \subset SO(Q) \simeq \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^{d-1})$

$$Q(x) = x_1^2 + \dots + x_{d-1}^2 - x_d^2$$

Fait : Si $g \in SO(Q)$,

$$\mu(g) = (\mu_1(g), 0, \dots, 0, -\mu_1(g))$$

où $\mu_1(g) = d_{\mathbb{H}^{d-1}}(o, g.o)$

$$o = (0, \dots, 0, 1)$$

<u>Conclusion</u> : Γ P_1-Anosov ssi convexe-cocomp. dans $\mathbb{H}^{d-1}$.

$$\xi : \partial_\infty \Gamma \hookrightarrow \partial_\infty \mathbb{H}^{d-1} = \{ [v] \in P(V) \mid Q(v) = 0 \}$$

$$\xi^* : \partial_\infty \Gamma \hookrightarrow P(V^*)$$

$$x \longmapsto [Q(x, .)] = \text{hyperplan tangent à } \partial_\infty \mathbb{H}^{d-1} \subset P(V)$$