3. Flots linéaires et scindements dominés :

Γ groupe hyperbolique. On fixe (X,d) espace géodésique propre, δ-hyperbolique tq Γ agit librement prop. disc. cocompact. sur X.

$$\mathcal{G}(X) = \{ g : \mathbb{R} \to X \text{ géodésique} \}$$

$$\mathcal{G}(X/\Gamma) = \Gamma \backslash \mathcal{G}(X)$$

$\mathcal{G}(X)$ muni de la topologie compacte ouverte

$$\pi : \mathcal{G}(X) \longrightarrow X$$
$$g \longmapsto g(0)$$

Prop : π est Γ-équivariante et propre (i.e. $\pi^{-1}(\text{Compact})$ est compacte).

Preuve : Arzela-Ascoli.

Corollaire : Γ agit prop. disc, cocomp. sur $\mathcal{G}(X)$.

Preuve : K compact de $\mathcal{G}(X)$. Alors $\pi(K)$ compact.

$$\{g \text{ tq } g.K \cap K \neq \emptyset\} \subset \{g \text{ tq } g.\pi(K) \cap \pi(K) \neq \emptyset\}$$

fini car $\Gamma \circlearrowright X$ prop. disc.

donc $\Gamma \circlearrowright \mathcal{G}(X)$ prop. disc.

Soit $C \subset X$ compact tq $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma.C = X$

$$\Longrightarrow \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma.\underbrace{\pi^{-1}(C)}_{\text{compact par propriété de } \pi.} = \mathcal{G}(X)$$

Donc $\Gamma \backslash \mathcal{G}(X)$ est compact.

Flot géodésique : $\tilde{\varphi}_t(g) : s \longrightarrow g(s+t)$

passe au quotient en un flot φ_t sur $\mathcal{G}(\Gamma \backslash X)$

Exemple 1 : $\Gamma = \pi_1(M)$, M riemannienne compacte sans bord de courbure < 0. $X = \tilde{M}$.

Alors $\mathcal{G}(\tilde{M}) \cong T_1\tilde{M} = \{v \in T\tilde{M} \text{ tq } \|v\| = 1\}$

$$\mathcal{G}(\Gamma\backslash X) = \mathcal{G}(M) \cong T_1 M$$

φ flot géodésique, i.e.

$x \in M$, $v \in T_1 M(x)$

$$\varphi_t(x,v) = (\gamma(t), \dot\gamma(t))$$

où γ géodésique partant de x dirigée par v.

Exemple 2 :

$\Gamma \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^d)$ convexe-cocompact,

X convexe fermé non vide de $\mathbb{H}^d$ tq $\Gamma\backslash X$ compact

<u>Fait</u> : $g : \mathbb{R} \to \mathbb{H}^d$ est contenue dans X ssi ses extrémités sont dans Λ_Γ.

$$\mathcal{G}(X) = \{v \in T_1\mathbb{H}^d \text{ tq } \lim_{t\to\pm\infty} \tilde{\varphi}_t(v) \in \Lambda_\Gamma\}$$

$$\mathcal{G}(\Gamma\backslash X) = \{ v \in T_1(\Gamma\backslash \mathbb{H}^d) \text{ tq } \tilde{\varphi}_t(v) \text{ reste dans un compact de } \Gamma\backslash\mathbb{H}^d \text{ pour tout } t \}$$

= ensemble récurrent du flot géodésique

Soit maintenant $\rho : \Gamma \longrightarrow SL(V)$ représentation linéaire.

Def : ρ est P_1-Anosov s'il existe $C, D > 0$ tq

$$\forall \gamma \in \Gamma, \quad \mu_1(\rho(\gamma)) - \mu_2(\rho(\gamma)) \geq \frac{1}{C} |\gamma|_S - D$$

(équivalent à $\ker \rho$ est fini et $\mathrm{im}(\rho)$ est P_1-Anosov)

$V_\rho = X \times V / (x,v) \sim (\gamma . x, \rho(\gamma).v)$

fibré vectoriel sur $\Gamma\backslash X$

$E_\rho = \mathcal{G}(X) \times V / \Gamma$

$= \pi^* V_\rho$

$\pi : \mathcal{G}(\Gamma\backslash X) \longrightarrow \Gamma\backslash X$

fibré vectoriel sur $\mathcal{G}(\Gamma\backslash X)$

φ se relève en un flot linéaire $\hat{\varphi}$ sur E_ρ, i.e.

$\hat{\varphi}_{t|E_\rho(x)} : E_\rho(x) \longrightarrow E_\rho(\varphi_t(x))$ linéaire.

$\hat{\varphi}$ défini sur $\mathcal{G}(X) \times V$ par $\hat{\varphi}_t(x,v) = (\varphi_t(x), v)$

Définition : $(E_\rho, \hat{\varphi})$ admet un scindement dominé (dominated splitting) de rang k si

(a) il existe une décomposition continue, $\hat{\varphi}$-invariante

$$E_\rho = F \oplus G, \quad \mathrm{rang}(F) = k$$

(b) $\exists\, C, \alpha > 0$ tq $\forall v \in F, \forall w \in G$,

$$\frac{\|\hat{\varphi}_t(v)\|^2}{\|\hat{\varphi}_t(w)\|^2} \leq C e^{-\alpha t} \frac{\|v\|^2}{\|w\|^2}$$

où $\|\cdot\|$ métrique quelconque sur E_ρ.

<u>Rmq</u>: $\mathcal{G}(X)$ est compact, indép. de $\|\cdot\|$

Théorème : Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $\rho : \Gamma \longrightarrow SL(V)$ est P_1-Anosov

(ii) $(E_\rho, \hat{\varphi})$ admet un scindement dominé de rang 1.

- Prop (ii) < Bochi - Potrie - Sambarino (notion classique de dynamique)

essentiellement la même définition que Labourie

- équivalence entre (i) et (ii) :

Guéritaud - Guichard - Kassel - Wienhard,

Kapovich - Leeb - Porti

Démonstration :

g métrique euclidienne sur V_ρ, i.e. f.q. > 0 sur chaque fibre, $\mathcal{C}^0$, de det 1.

$$\begin{array}{c} V_\rho \\ \downarrow \\ \Gamma \backslash X \end{array}$$

q se relève en $\tilde{q}$ métrique euclidienne sur le fibré trivial $X \times V \longrightarrow X$, i.e.

$$\tilde{q} : X \longrightarrow \Omega = \{\text{métriques de det } 1 \text{ sur } V\}$$
$$\simeq SL(d,\mathbb{R})/SO(d)$$

<u>Fait</u> : $\tilde{q}$ est ρ-équivariante, i.e.

$$\tilde{q}(\gamma \cdot x) = \rho(\gamma) \cdot \tilde{q}(x)$$

Réciproquement, toute application $\tilde{q} : X \to \Omega$ ρ-équivariante descend en une métrique sur V_ρ.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : On suppose $\rho(\Gamma)$ Anosov.

$$\xi : \partial_\infty \Gamma \longrightarrow P(V)$$

$$\xi^* : \partial_\infty \Gamma \longrightarrow P(V^*)$$

$$\mathcal{G}(X) \longrightarrow \partial_\infty \Gamma^{(2)} = \{(x,y) \in \partial_\infty \Gamma^2, x \neq y\}$$
$$g \longmapsto (g_-, g_+) = \left(\lim_{t \to +\infty} g(-t), \lim_{t \to +\infty} g(t)\right)$$

$$\tilde{E}_\rho = \mathcal{G}(X) \times V$$

$$\tilde{E}_\rho(g) = \xi(g_+) \oplus \xi^*(g_-)$$

décomposition est Γ-invariante et $\hat{\varphi}$-invariante

donc descend en $E_\rho = L \oplus H$ $\hat{\varphi}$-invariante.

$v \in L(x)$, $w \in H(x)$ $(x \in \mathcal{G}(\Gamma\backslash X) = \Gamma\backslash\mathcal{G}(X))$

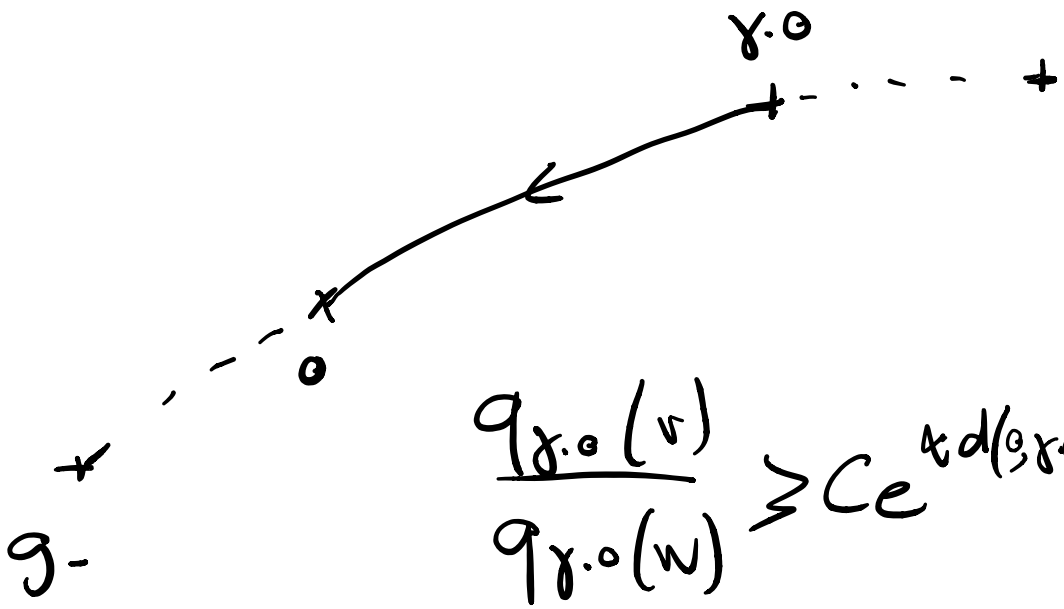
relèvements en $\tilde{v} \in \xi(g_+)$, $\tilde{w} \in \xi(g_-)$

où g géodésique qui relève x.

$$\frac{q(\hat{\varphi}_t(v))}{q(\hat{\varphi}_t(w))} = \frac{\tilde{q}(\hat{\varphi}_t(\tilde{v}))}{\tilde{q}(\hat{\varphi}_t(\tilde{w}))} = \frac{\tilde{q}_{g(t)}(\tilde{v})}{\tilde{q}_{g(t)}(\tilde{w})}$$

$$\leq C e^{-\alpha t} \frac{\tilde{q}_{g(0)}(\tilde{v})}{\tilde{q}_{g(0)}(\tilde{w})} = \frac{q(v)}{q(w)} \qquad \square$$

2) $\Rightarrow$ 1) On suppose qu'on a un sous-fibré dominé $E_\rho = L \oplus H$.



$v \in \tilde{L}(g)$

$w \in \tilde{H}(g)$

$$\frac{q_{\gamma.o}(v)}{q_{\gamma.o}(w)} \geq C e^{\alpha d(o,\gamma.o)} \frac{q_o(v)}{q_o(w)}$$

$$\frac{q_o(\gamma^{-1}v)}{q_o(\gamma^{-1}w)} \geq C e^{\alpha d(o,\gamma.o)} \frac{q_o(v)}{q_o(w)}$$

$$\rightsquigarrow \mu_1 - \mu_2(\gamma^{-1}) \geq \alpha\, d(o,\gamma.o) - C$$

<u>Fait</u> (cf. DM2) : $\exists K$ tq $\forall x, y \in X$,
il existe une géodésique g tq $d(x, g(\mathbb{R})) \leq K$
et $d(y, g(\mathbb{R})) \leq K$

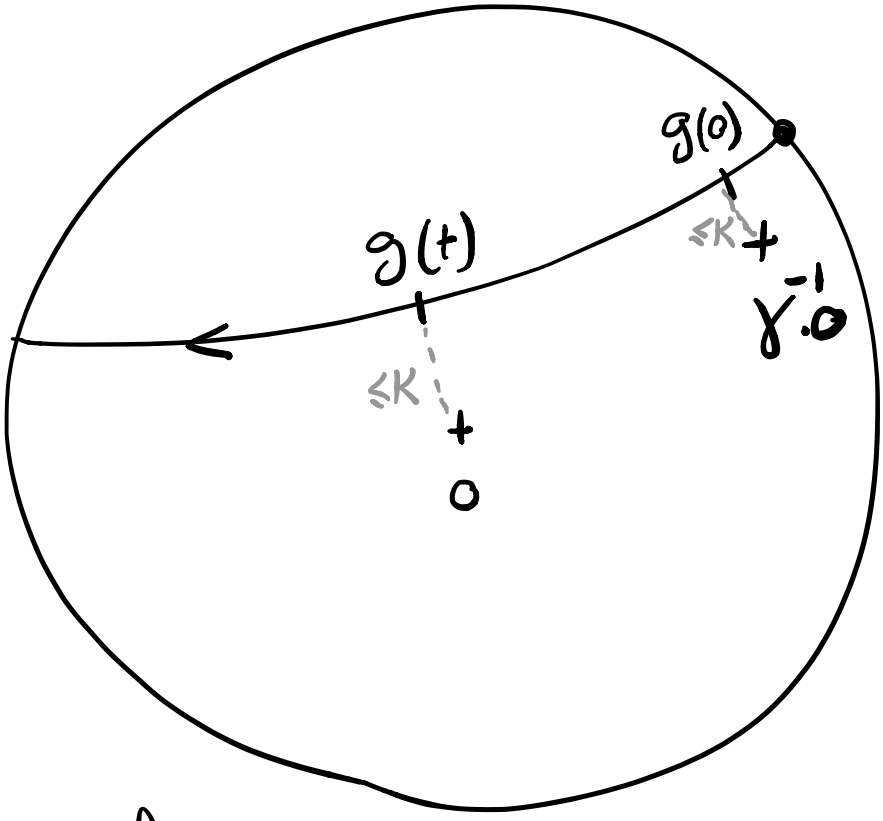
X espace géodésique, propre, δ-hyperbolique,
sur lequel Γ agit librement, prop. disc. cocomp.

$o \in X, \quad \gamma \in \Gamma$

$g : \mathbb{R} \longrightarrow X$ tq $d(o, g(0)) \leq K$

et $d(\gamma^{-1}.o, g(t)) \leq K$

$t \geq d(o, \gamma^{-1}.o) - 2K$



$E_\rho = L \oplus K$ se relève en

$\tilde{E}_\rho = \mathcal{G}(X) \times V = \tilde{L} \oplus \tilde{H}$

$\tilde{v} \in \tilde{L}_g$, $\tilde{w} \in \tilde{H}_g$

Propriété de rendement dominé :

$$\frac{\tilde{q}_{g(t)}(\tilde{v})}{\tilde{q}_{g(t)}(\tilde{w})} \leq C e^{-\alpha t} \frac{\tilde{q}_{g(0)}(\tilde{v})}{\tilde{q}_{g(0)}(\tilde{w})}$$

$$\parallel$$

$$\frac{q(\hat{\varphi}_t(v))}{q(\hat{\varphi}_t(w))}$$

Par ailleurs, $d(g(t), o) \leq K$, $d(g(0), \gamma^{-1}.o) \leq K$

$$\Rightarrow \frac{1}{C_1} \tilde{q}_o \leq \tilde{q}_{g(t)} \leq C_1 \tilde{q}_o$$

$$\frac{1}{C_1} \tilde{q}_{\gamma^{-1}.o} \leq \tilde{q}_{g(0)} \leq C_1 \tilde{q}_{\gamma^{-1}.o}$$

Donc $\dfrac{\tilde{q}_o(v)}{\tilde{q}_o(w)} \leq C_2 e^{-\alpha d(o,\gamma^{-1}o)} \dfrac{\tilde{q}_{\gamma^{-1}o}(v)}{\tilde{q}_{\gamma^{-1}o}(w)}$

$$\frac{\tilde{q}_o(\gamma v)}{\tilde{q}_o(\gamma w)} \geq \frac{1}{C_2} e^{\alpha d(o,\gamma^{-1}o)} \frac{\tilde{q}_o(v)}{\tilde{q}_o(w)}$$

$$\Longrightarrow e^{\mu_1(\gamma)-\mu_2(\gamma)} \geq \frac{1}{C_3} e^{\alpha d(o,\gamma^{-1}o)}$$

$$\Longrightarrow \mu_1(\gamma) - \mu_2(\gamma) \geq \alpha d(o,\gamma^{-1}o) - C_3$$

il faut contrôler l'angle entre $\tilde{L}$ et $\tilde{H}$ par un $\varepsilon > 0$ uniforme

revient à contrôler l'angle entre L et H pour q possible car $\mathcal{G}(\Gamma\backslash X)$ est compact.