Stabilité par déformation :

Théorème : G groupe de Lie semi-simple, Γ groupe hyperbolique, $\rho : \Gamma \longrightarrow G$ P_Θ-Anosov. Alors $\exists$ U voisinage de ρ dans $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ tel que tout $\rho' \in U$ est P_Θ-Anosov

Preuve :

1 - On se ramène à $\rho : \Gamma \longrightarrow SL(V)$ P_1-Anosov.

2 - Soit ρ' proche de ρ,
$(E_\rho, \hat{\varphi})$, $(E_{\rho'}, \hat{\psi})$ flots linéaires associés
il existe un isomorphisme $E_\rho \simeq E_{\rho'}$ tel que $\hat{\psi}$ proche de $\hat{\varphi}$.

3_ $E_\rho = L \oplus H$ scindement dominé $\hat{\varphi}$-inv.

$\hat{\psi}$ déformation de $\hat{\varphi}$. On veut construire un scindement dominé pour $\hat{\psi}$.

Analogue fibré du fait suivant :

Prop : Soit $\varphi \in SL(V)$ <u>proximal</u>, i.e. il existe une décomposition $V = L \oplus H$ φ-invariante tq $\forall v \in L$, $\forall w \in H$,

$$\frac{\|\varphi(v)\|}{\|\varphi(w)\|} \leq \lambda \frac{\|v\|}{\|w\|}, \quad \lambda < 1$$

alors $\exists$ U voisinage de φ dans $SL(V)$ tel que tout $\psi \in U$ est encore proximal.

Preuve : $[L] \in P(V)$ pt fixe de φ

$d_{[L]} \varphi^{-1}$ contractante.

ψ proche de φ $\Rightarrow$ ψ^{-1} contractante au $\mathcal{V}([L])$

$\Rightarrow$ pt fixe

Application à la construction d'exemples :

Construction générale :

$\Gamma \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^d)$ convexe-cocompact

$\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^d) \overset{i}{\hookrightarrow} G$ semi-simple.

Prop : $i(\Gamma)$ est P_Θ-Anosov pour un certain P_Θ (non trivial)

Preuve : $i : \mathfrak{a}^+_{\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^d)} \hookrightarrow \mathfrak{a}^+_G$ telle que

$$\mu(i(g)) = i(\mu(g))$$

$$\mathfrak{a}^+_{\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^d)} = \mathbb{R}_+, \quad \mu(g) = d(o, g.o)$$

Si θ racine simple de G, alors

$$\theta(\mu(i(g))) = \theta \circ i(\mu(g)) = \alpha_\theta d(o, g.o)$$

$i(\Gamma)$ P_Θ-Anosov où $\Theta = \{\theta \mid \alpha_\theta \neq 0\}$

Θ non vide car {racines simples} base de $\mathfrak{a}^*$

Les petites déformations de $i(\Gamma)$ restent P_Θ-Anosov.

Intéressant s'il existe des déformations non triviales.

<u>Rmq</u> : P_Θ-Anosov stable par conjugaison.

Déformations non triviales :

- groupes libres (facile)
- groupes de surfaces (un peu plus élaboré mais très flexible et très intéressant)
- déformations à la Johnson-Millson

2 exemples explicites :

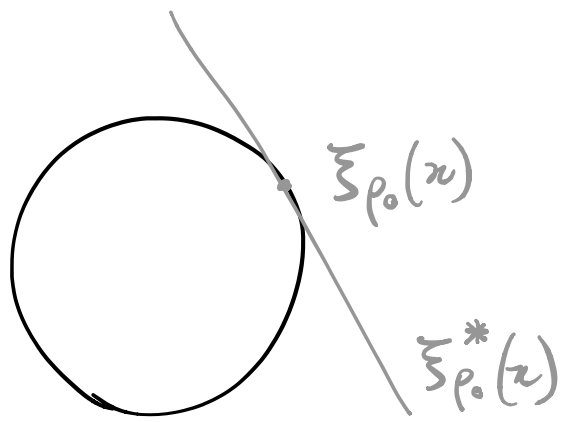
* Convexes divisibles :

Γ réseau uniforme de $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^d)$

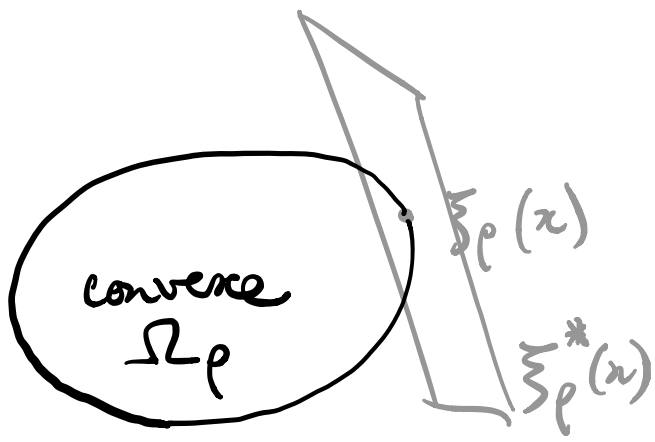
$\simeq SO(d,1) \subset SL(d+1,\mathbb{R})$

$\rho_0 : \Gamma \hookrightarrow SO(d,1) \subset SL(d+1,\mathbb{R})$ est P.-Anosov

$\partial_\infty \Gamma \simeq \partial_\infty \mathbb{H}^d = \{\text{droites isotropes}\} \subset P(\mathbb{R}^{d+1})$



$\partial_\infty \Gamma \simeq \partial_\infty \mathbb{H}^d \subset P(\mathbb{R}^{d+1})$



ρ proche de ρ_0

ρ_0

$\rho(\Gamma)$ agit prop. disc. cocomp. sur Ω_ρ

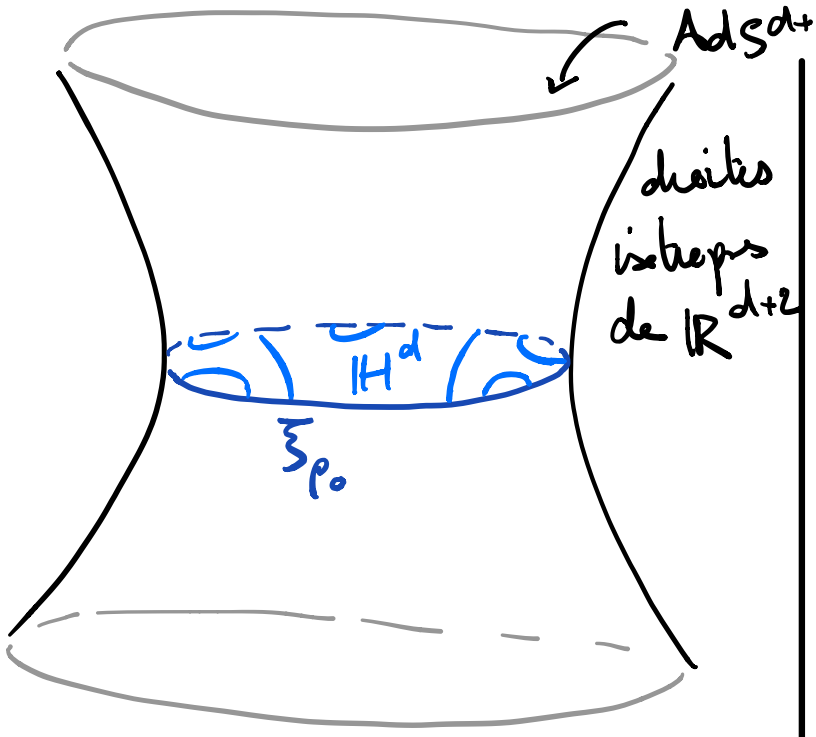
<u>Fait</u> : des déformations à la J-M. existent

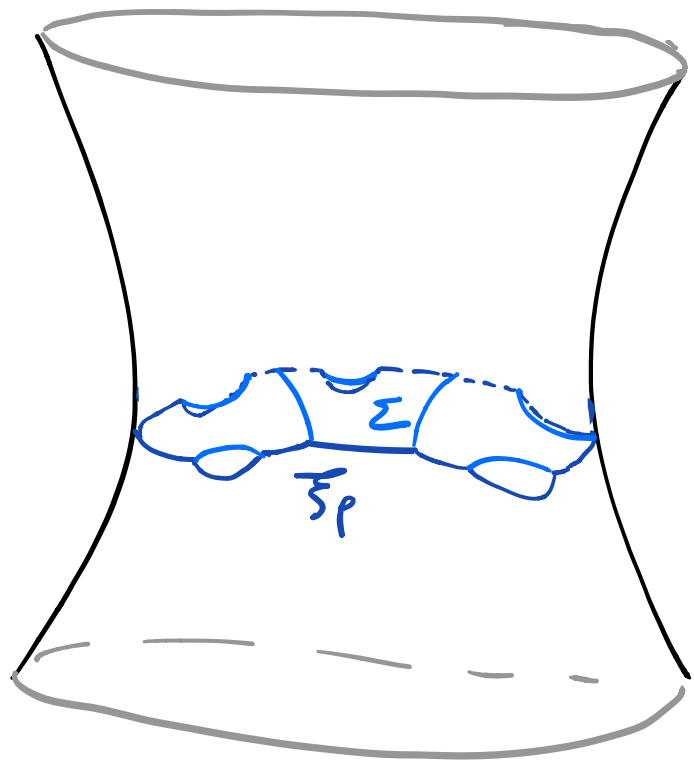
* Espaces-temps anti-de Sitter :

Γ réseau uniforme de $SO(d,1)$

$\rho_0 : \Gamma \hookrightarrow SO(d,1) \subset SO(d,2) = \mathrm{Isom}(AdS^{d+1})$
$(\subset SL(d+2))$

AdS^{d+1} analogue Lorentzien de $\mathbb{H}^{d+1}$





ρ_0 P_1-Anosov, agit prop. disc. cocomp. sur $\mathbb{H}^d$.

$\xi_{\rho_0}(\partial_\infty \Gamma) = \partial_\infty \mathbb{H}^d \subset \partial_\infty AdS^{d+1}$

ρ P_1-Anosov, agit prop. disc. cocomp. sur Σ (hypersurface de type espace)

$\xi_\rho(\partial_\infty \Gamma) = \partial_\infty \Sigma \subset \partial_\infty AdS^{d+1}$

$$\boxed{\xi^*(x) = \xi(x)^\perp = T_{\xi(x)} \partial_\infty AdS^{d+1}}$$