École Normale Supérieure, Année 2019-2020

1^{e} année, Algèbre 1

TD n° 1 : Généralités sur les groupes

Exercice 1.

1. Soit E un ensemble. Décrire le quotient de E par la relation d'équivalence "égalité". Décrire le quotient de E par la relation d'équivalence $E \times E$.
2. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Montrer que la relation de congruence modulo n sur $\mathbb{Z}$ est une relation d'équivalence puis décrire le quotient $\mathbb{Z}$ par cette relation.
3. Soit V la classe des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps k. Soit R la relation d'isomorphisme. Montrer que c'est une relation d'équivalence puis décrire le quotient V/R.
4. On munit $\mathbb{Z}$ d'une relation R définie par : xRy s'il existe un nombre premier p tel que $x = py$. Décrire $\mathbb{Z}/R$.
5. † Soit $r(n)$ le nombre de relations d'équivalence sur un ensemble à n éléments. Montrer que

$$r(n) = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}.$$

Exercice 2.

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition, associative, avec élément neutre e, et telle que tout élément de E possède un inverse à gauche. Démontrer que tout élément de E possède un inverse à droite qui coïncide avec son inverse à gauche. En déduire que E est un groupe. Qu'en est-il si l'on suppose l'existence d'un inverse à droite ?

Exercice 3.

Soit G un groupe d'exposant 2 (i.e. tout $g \in G$ vérifie $g^2 = e$).

1. Montrer que G est un groupe abélien.
2. Montrer que si G est fini, il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $G \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$.

Exercice 4.

Soit G un groupe et soit H un sous-ensemble non vide de G stable pour la loi de G. Montrer que si H est fini, alors H est un sous-groupe de G. Qu'en est-il si H est infini ?

Exercice 5.

Déterminer tous les morphismes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Q}_+^*, \times)$.

Exercice 6.

Donner la liste de tous les groupes (à isomorphisme près) de cardinal inférieur ou égal à 7.

Exercice 7.

1. Montrer que les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont les $n\mathbb{Z}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que les sous-groupes non denses de $\mathbb{R}$ sont les $a\mathbb{Z}$, avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 8.

Soit $f : G_1 \to G_2$ un morphisme de groupes et soit x un élément de G_1 d'ordre fini. Démontrer que l'ordre de $f(x)$ divise l'ordre de x.

Exercice 9.

Soit G un groupe.

1. Démontrer que des éléments conjugués dans G sont de même ordre.
2. Deux éléments de même ordre dans G sont-ils toujours conjugués ?
3. Trouver tous les groupes abéliens finis G pour lesquels la question précédente a une réponse positive. Un exemple non abélien ?

Exercice 10. [Vrai-faux]

Soit G un groupe. Vrai ou faux ?

1. Si tout sous-groupe H de G est distingué dans G, alors G est abélien.
2. Si $H \triangleleft G$ et $K \triangleleft H$, alors $K \triangleleft G$.
3. Soient x et $y \in G$ d'ordre fini, alors xy est d'ordre fini.
4. Si G a un nombre fini de sous-groupes, alors G est fini.
5. Soit G un ensemble fini, il existe un nombre fini de structures de groupes sur G.

Exercice 11.

Soit G un groupe et H un sous-groupe d'indice 2. Montrer que H est un sous-groupe distingué de G. Qu'en est-il si on remplace 2 par un nombre premier p ?

Exercice 12.

Soit G un groupe et soit $H \triangleleft G$ un sous-groupe distingué.

1. Décrire les sous-groupes distingués de G/H en fonction de ceux de G.
2. Soit K un sous-groupe de G.
   (a) Si K est distingué dans G et contient H, montrer que l'on a un isomorphisme
   $$(G/H)/(K/H) \cong G/K.$$
   (b) Montrer que HK est un sous-groupe de G égal à KH.
   (c) Montrer que l'on a un isomorphisme $K/(K \cap H) \cong (HK)/H$.

Exercice 13.

Soit G un groupe tel que le quotient par son centre est monogène. Montrer que G est abélien.

Exercice 14. [Théorème de Cayley]†

Soit G un groupe fini.

1. Montrer qu'il existe un entier n tel que G soit isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$.
2. Montrer qu'il existe un entier n tel que G soit isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{A}_n$.
3. Montrer qu'il existe un entier n tel que G soit isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.

Exercice 15. [Autour du groupe symétrique]†

Les questions sont indépendantes.

1. Déterminer le nombre minimal de transpositions pour engendrer $\mathfrak{S}_n$.
2. Déterminer les classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_n$ et dans $\mathfrak{A}_n$. On note $p(n)$ le nombre de classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$. Montrer que l'on a une égalité de séries formelles
   $$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)T^n = \prod_{m=0}^{\infty} \frac{1}{1-T^m}.$$
   Essayer de déterminer un tel *produit eulerien* pour $\mathfrak{A}_n$.
3. Montrer que pour $n \geqslant 2$, $\mathfrak{S}_{n+2}$ contient deux sous-groupes non conjugués isomorphes à $\mathfrak{S}_n$.
4. Montrer que tout sous-groupe d'indice n dans $\mathfrak{S}_n$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$. On admettra que pour $n \geqslant 5$ les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$ sont $\mathfrak{A}_n$, $\{1\}$ et $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 16.

Soit p un nombre premier, $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ le corps fini de cardinal p. Soit $n, m \geqslant 1$ des entiers.

1. Déterminer le groupe des automorphismes du groupe additif $(\mathbb{F}_p)^n$. Calculer son cardinal comme fonction polynomiale de p.
2. Déterminer et énumérer les sous-groupes de cardinal p^m de $(\mathbb{F}_p)^n$.

Exercice 17. †

Soit G un groupe de type fini (i.e. engendré par un nombre fini d'éléments). Montrer que tout sous-groupe d'indice fini est de type fini. Qu'en est-il pour les sous-groupes qui ne sont pas d'indice fini ?

Exercice 18. †

Soit G un groupe de cardinal $n \geqslant 1$. Montrer que G possède au plus $n^{\log_2(n)}$ endomorphismes.

Exercice 19. [Normalisateur vs centralisateur]†

Soit S un sous-ensemble non vide d'un groupe fini G. Soient $N(S) := \{g \in G \mid gSg^{-1} = S\}$ et $C(S) := \{g \in G \mid \forall s \in S\,, gsg^{-1} = s\}$ le *normalisateur* et le *centralisateur* de S dans G.

1. Montrer que $N(S)$ et que $C(S)$ sont des sous-groupes de G et $C(S)$ est distingué dans $N(S)$.
2. Montrer que $N(S) = G$ si et seulement si $S = \bigcup_{g\in G} gSg^{-1}$.
3. Si H est un sous-groupe distingué de G, alors il en est de même pour $C(H)$.
4. Si H est un sous-groupe de G, alors $N(H)$ est le plus grand sous-groupe de G contenant H et dans lequel H est distingué.
5. Déterminer $N(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}))$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

Exercice 20.

Soit p un nombre premier. Soit G un groupe tel que :

1. les éléments non triviaux sont d'ordre p,
2. les éléments non triviaux sont conjugués.

Montrer que G est d'ordre 1 ou 2.

Exercice 21. [Groupes résiduellements finis et hopfien]††

On dit qu'un groupe G est *résiduellement fini* si l'intersection de ses sous-groupes d'indice fini est trivial.

1. Montrer qu'un groupe G est résiduellement fini si et seulement si il est isomorphe à un sous-groupe d'un produit de groupes finis.
2. Soit G un groupe résiduellement fini. Montrer que si G est de type fini, alors tout endomorphisme surjectif de G est bijectif. On dit alors que G est un groupe *hopfien*.
3. Donner un exemple d'un groupe hopfien qui n'est pas résiduellement fini.
4. Soit $m, n \geqslant 1$ deux entiers. Soit $BS(m, n)$ le groupe de *Baumslag-Solitar*. C'est un groupe, à deux générateurs a, b et une relation, défini par
$$BS(m,n) = \left\langle a, b \mid a^{-1}b^m a = b^n \right\rangle .$$
Déterminer, en fonction de m et n, les cas où $BS(m,n)$ est résiduellement fini puis les cas où ce groupe est hopfien.

Exercice 22.

Soit G un groupe et H un sous-groupe d'indice fini tel que G est égal à l'union des conjugués de H. Montrer que $G = H$. Que se passe-t-il si H n'est plus supposé d'indice fini ?

Exercice 23. ††

Soit $f\colon G \to G'$ une application entre deux groupes G et G' telle que pour $x, y \in G$ on ait $f(xy) = f(x)f(y)$ *ou bien* $f(xy) = f(y)f(x)$. Montrer qu'alors f est un morphisme ou un anti-morphisme.