École Normale Supérieure, Année 2019-2020

1e année, Algèbre 1

TD n° 10 : Théorie des représentations II : Représentations complexes de dimension finie des groupes finis

---

Dans cette feuille, si ce n'est pas précisé, tous les groupes sont supposés finis et les représentations sont supposées complexes et de dimension finie.

Exercice 1. [Quelques tables de caractères]

Dans chaque cas, décrire à l'aide de la théorie des caractères les tables des groupes suivants, puis expliciter les représentations irréductibles,

1. pour le groupe $\mathfrak{S}_3$,
2. pour le groupe $\mathfrak{A}_4$,
3. pour le groupe $\mathfrak{S}_4$, que l'on identifiera aux isométries du cube,
4. pour q puissance d'un nombre premier p, le groupe des transformations affines de la droite $\mathbb{F}_q$.

Exercice 2.

Soit G un groupe fini et ψ, ϕ des caractères complexes de G.

1. Montrer que si ψ est de degré 1, alors $\psi\phi$ est irréductible si et seulement si ϕ l'est.
2. Montrer que si ψ est de degré strictement supérieur à 1, alors $\psi\bar{\psi}$ n'est pas irréductible.
3. On suppose que ϕ est un caractère irréductible de G et que c'est le seul caractère irréductible de G de degré $\phi(1)$. Montrer que si ψ est un caractère irréductible de degré 1 de G tel que pour $g \in G$, $\psi(g) \neq 1$, alors $\phi(g) = 0$.

Exercice 3.

Deux groupes qui ont la même table des caractères sont-ils nécessairement isomorphes[1] ?

Exercice 4.

Soit G un groupe fini, on note C son centre. Le but est de montrer que la dimension de toute représentation irréductible de G divise l'indice $[G\colon C]$. Soit (V, ρ) une représentation irréductible de G de dimension finie n.

1. Montrer que la restriction de ρ à C détermine un morphisme $\lambda\colon C \to \mathbb{C}^*$.
2. Soit $m \geqslant 1$ un entier. Montrer que $\rho^{\otimes m}\colon G^m \to \mathrm{GL}(V \otimes \cdots \otimes V)$ est une représentation irréductible.
3. Soit $H = \{(s_1, \ldots, s_m) \in C^m \mid s_1 \cdots s_m = 1\}$, montrer que $\rho^{\otimes m}$ définit une représentation irréductible de G^m/H.
4. En déduire que pour tout entier $m \geqslant 1$ on a
$$\left(\frac{\mathrm{Card}(G)}{\mathrm{Card}(C)n}\right)^m \in \frac{1}{\mathrm{Card}(C)}\mathbb{Z}.$$
5. Conclure.

---

1. *Hint :* Pensez à vos groupes d'ordre 8 préférés !

Exercice 5. [Théorie de Fourier sur les groupes finis]

Soit G un groupe fini, on note $\mathbb{C}[G]$ l'algèbre de groupe de G. On note $(W_1, \rho_1), \dots (W_k, \rho_k)$ les représentations complexes irréductibles de dimension finie de G.

1. Montrer qu'on a un isomorphisme naturel de $\mathbb{C}$-algèbres

$$\rho = (\tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_k) \colon \mathbb{C}[G] \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{k} \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W_i).$$

2. Montrer que pour $(u_1, \dots, u_k) \in \prod_{i=1}^{k} \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W_i)$, l'élément $u = \sum_{g\in G} a_g e_g \in \mathbb{C}[G]$ correspondant par l'isomorphisme précédent est donné par

$$a_g = \frac{1}{\mathrm{Card}(G)} \sum_{i=1}^{k} \dim_{\mathbb{C}}(W_i) \, \mathrm{Tr}_{W_i}(\rho_i(g^{-1}) u_i).$$

3. Pour $u = \sum_{g\in G} a_g e_g$ et $v = \sum_{g\in G} b_g e_g$ des éléments de $\mathbb{C}[G]$, on pose $\langle u, v\rangle = \mathrm{Card}(G) \sum_{g\in G} a_{g^{-1}} b_g$. En déduire la *formule de Plancherel* :

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{k} \dim_{\mathbb{C}}(W_i) \, \mathrm{Tr}_{W_i}(\tilde{\rho}_i(uv))$$

4. Montrer qu'on a un isomorphisme naturel de $\mathbb{C}$-algèbres

$$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_k) \colon Z(\mathbb{C}[G]) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^k.$$

En déduire que si $u = \sum_{g\in G} a_g e_g \in Z(\mathbb{C}[G])$, alors

$$\omega_i(u) = \frac{1}{\dim_{\mathbb{C}}(W_i)} \sum_{g\in G} a_g \chi_i(g),$$

où χ_i est le caractère de ρ_i. En déduire une base de $Z(\mathbb{C}[G])$ d'idempotents orthogonaux[2], puis que tout morphisme de $\mathbb{C}$-algèbre $Z(\mathbb{C}[G]) \to \mathbb{C}$ est nécessairement l'un des ω_i.

Exercice 6.

Soit G un groupe fini, χ le caractère complexe d'une représentation de G. On pose

$$K_\chi = \{g \in G \mid |\chi(g)| = \chi(1)\}.$$

1. Montrer que K_χ est un sous-groupe distingué de G.
2. Montrer que G est simple si et seulement si pour tout caractère irréductible χ on a $K_\chi = \{e\}$.

Exercice 7. [Théorème de Burnside]

Le but de cet exercice est de montrer le théorème de Burnside : si p et q sont des nombres premiers, alors tout groupe fini G d'ordre $p^a q^b$ est résoluble. On raisonne par contradiction. Soit G le groupe d'ordre minimal $p^a q^b$ qui n'est pas résoluble.

1. Montrer que G est un groupe simple.
2. Montrer qu'il existe $g \in G$ tel que la classe de conjugaison de g est de cardinal q^d pour $d \geqslant 0$.
3. Montrer qu'il existe un caractère $\chi \colon G \to \mathbb{C}^*$ non trivial tel que q ne divise pas $\chi(1)$ et $\chi(g) \neq 0$.
4. Montrer que $q^d \chi(g)/\chi(1)$ est un entier algébrique. En déduire que $\chi(g)/\chi(1)$ est un entier algébrique.
5. Montrer que $|\chi(g)| = \chi(1)$.
6. Conclure à l'aide de l'exercice précédent.

2. C'est à dire que $p_i p_j = \delta_{i,j}$ et $p_1 + \dots + p_k = 1$.

Exercice 8.

Soit G un groupe fini. On note $\mathbb{Z}[G]$ l'algèbre de groupe sur $\mathbb{Z}$. On considère $Z(\mathbb{Z}[G])$ le centre de cette algèbre.

1. Soit $C_1, \ldots, C_k$ les classes de conjugaison de G. Montrer que le groupe abélien $Z(\mathbb{Z}[G])$ est libre de base $z_1, \ldots, z_k$ tel que
$$z_i = \sum_{x \in C_i} x.$$
2. Montrer que tout élément de $Z(\mathbb{Z}[G])$ est entier sur $\mathbb{Z}$.