École Normale Supérieure, Année 2019-2020

1$^{\text{e}}$ année, Algèbre 1

TD n° 3 : Actions de groupes

Exercice 1.

On fait agir $\mathfrak{S}_3$ sur lui-même par conjugaison. Décrire les orbites et les stabilisateurs de cette action.

Exercice 2.

Montrer que pour p un nombre premier, un groupe de cardinal p^2 est abélien. Combien un tel groupe a-t-il d'éléments d'ordre p ?

Exercice 3.

Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X. Calculer le nombre moyen de points fixes des éléments de G.[1] En déduire le nombre moyen de points fixes d'une permutation.

Exercice 4. [Lemme de Cauchy]

Soit G un groupe fini et soit p un nombre premier divisant le cardinal de G. Montrer que G admet un élément d'ordre p.[2]

Exercice 5.

Soit G un groupe fini et p le plus petit nombre premier divisant l'ordre de G. Montrer que tout sous-groupe de G d'indice p est distingué.

Exercice 6.

Soit G un groupe. Soit H un sous-groupe de G d'indice n. Montrer que H contient un sous-groupe N d'indice fini tel que N est distingué dans G et $[G : N]$ divise $n!$.

Exercice 7.

Soit G un groupe. On note $\mathrm{Int}(G)$ le groupe des automorphismes intérieurs, i.e. les automorphismes de la forme $\gamma_g \colon x \mapsto gxg^{-1}$.

1. Montrer que $\mathrm{Int}(G)$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{Aut}(G)$.
2. Montrer que si le centre de G est réduit à l'identité, alors le centralisateur de $\mathrm{Int}(G)$ dans $\mathrm{Aut}(G)$ (i.e. l'ensemble des éléments de $\mathrm{Aut}(G)$ qui commutent à tous les éléments de $\mathrm{Int}(G)$) est aussi réduit à l'identité.
3. Soit G un groupe non-commutatif et simple (i.e. n'admet pas de sous-groupe distingué propre autre que $\{e\}$). Soit $\Gamma = \mathrm{Aut}(G)$, montrer que $\mathrm{Aut}(\Gamma) \cong \mathrm{Int}(\Gamma)$.

Exercice 8.

Soit p un nombre premier et soit G un p-groupe (i.e. un groupe dont le cardinal est une puissance de p). Soit K un corps de caractéristique p (i.e. $p = 0$ dans K). Montrer que si G agit linéairement sur K^d, pour $d \geqslant 1$ un entier, alors K^d admet une droite fixe pour cette action.

---

1. *Hint* : On pourra considérer l'ensemble $E = \{(g, x) \in G \times X : g \cdot x = x\}$
2. *Hint :* On pourra considérer une action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur $X = \{(g_1, \ldots, g_p) \in G^p \mid g_1 \cdots g_p = 1\}$.

Exercice 9.

Soit G un groupe fini non trivial agissant sur un ensemble fini X. On suppose que pour tout $g \in G$, tel que $g \neq e$, il existe un unique $x \in X$ tel que $g \cdot x = x$. On veut montrer que X admet un point fixe sous G (nécessairement unique).

1. On note $Y := \{x \in X : \mathrm{Stab}_G(x) \neq \{e\}\}$. Montrer que Y est stable par G.
2. On note $n = \mathrm{Card}(Y/G)$ et $y_1, \ldots, y_n$ un système de représentants de Y/G. Pour tout i, on note m_i le cardinal de $\mathrm{Stab}_G(y_i)$. En considérant l'ensemble $Z := \{(g, x) \in (G \setminus \{e\}) \times X : g \cdot x = x\}$, montrer que
$$1 - \frac{1}{|G|} = \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{m_i}\right).$$
3. En déduire que $n = 1$.
4. Conclure.

Exercice 10. †

Déterminer les groupes finis G tels que $\mathrm{Aut}(G)$ opère transitivement sur $G \setminus \{e\}$.

Exercice 11.

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de groupes finis admettant exactement n classes de conjugaison.

Exercice 12.

1. Soit G un p-groupe fini agissant sur un ensemble fini X. On note X^G l'ensemble des points fixes de X sous G. Montrer que
$$\mathrm{Card}(X^G) \equiv \mathrm{Card}(X) \pmod{p}.$$
2. Soit G un p-groupe agissant sur un ensemble fini X dont le cardinal n'est pas divisible par p. Montrer que X admet un point fixe sous l'action de G.
3. Soit G un p-groupe fini et $H \neq \{e\}$ un sous-groupe distingué de G. Montrer que l'intersection de H avec le centre de G n'est pas réduite à l'élément neutre.
4. Montrer qu'un groupe d'ordre p^n admet des sous-groupes d'ordre p^i pour tout $0 \leq i \leq n$.
5. Soit p un nombre premier congru à 1 modulo 4. On souhaite montrer que p est somme de deux carrés d'entiers. On note
$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 : x^2 + 4yz = p\}.$$
   (a) On définit $i : X \to X$ par les formules suivantes
$$i : (x, y, z) \mapsto \begin{array}{l} (x + 2z, z, y - x - z) \text{ si } x < y - z, \\ (2y - x, y, x - y + z) \text{ si } y - z < x < 2y, \\ (x - 2y, x - y + z, y) \text{ si } x > 2y. \end{array}$$
   Vérifier que i est bien définie.
   (b) Montrer que i est une involution.
   (c) Montrer que i a un unique point fixe.
   (d) Montrer que $\mathrm{Card}(X)$ est impair.
   (e) Montrer que l'application $j : X \to X$ définie par $j(x, y, z) = (x, z, y)$ admet un point fixe.
   (f) Conclure.

Exercice 13.

Combien y a-t-il de colliers différents formés de 9 perles dont 4 bleues, 3 blanches et 2 rouges ? On pourra considérer qu'un collier est une orbite sous une action du groupe diédral D_9 sur les applications $\{1, 2, \ldots, 9\} \to \{\text{bleue}, \text{blanche}, \text{rouge}\}$.

Exercice 14.

1. Calculer le groupe des isométries directes (resp. indirectes) d'un tétraèdre régulier dans l'espace euclidien de dimension trois (on pourra regarder l'action de ce groupe sur les sommets du tétraèdre).
2. Mêmes questions pour un cube et un octaèdre (on pourra regarder l'action du groupe des isométries du cube sur les diagonales de ce cube).
3. Mêmes questions pour un dodécaèdre et un icosaèdre (on pourra regarder l'action du groupe des isométries du dodécaèdre sur les "grands cubes" inscrits dans ce dodécaèdre).

Exercice 15.

1. Montrer que l'action naturelle de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ se restreint en une action du groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sur le demi-plan de Poincaré $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\} \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.
2. Montrer que cette action est fidèle. Identifier le stabilisateur de $i \in \mathcal{H}$.
3. Soit G un groupe agissant sur un espace topologique X. Une partie F de X est appelée *domaine fondamental* pour l'action de G sur X si elle vérifie :
$$\text{(i) } \overline{F^\circ} = F, \quad \text{(ii) } X = \bigcup_{h \in G} hF, \quad \text{(iii) } \forall g \in G \setminus \{1\}\,,\ F^\circ \cap (gF)^\circ = \emptyset.$$
Soit $D = \{z \in \mathcal{H} \ : \ |\mathrm{Re}(z)| \leq \frac{1}{2}, |z| \geq 1\}$.
   (a) En maximisant la partie imaginaire des éléments d'une orbite $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \cdot z$, montrer que D vérifie la propriété (ii).
   (b) Montrer que D est un domaine fondamental pour l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathcal{H}$.
   (c) En déduire que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ engendrent $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Exercice 16.

Soit K un corps à $q \neq 2$ éléments.

1. Montrer que $K^\times/(K^\times)^2$ est de cardinal $\frac{q-1}{2}$.
2. Compter de le nombre de polynômes unitaires irréductibles de degré 2 (i.e. couples $(a, b) \in K^2$ tel que $X^2 + aX + b$ n'admet pas de racine dans K).
3. En déduire que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ a $q^2 - 1$ classes de conjuguaison.
4. Déterminer les classes de conjugaison de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ [3].

Exercice 17.

Soit G un groupe, H et K des sous-groupes de G. Pour $x \in G$, on appelle HxK la *double classe* de x.

1. Montrer que deux doubles classes sont disjointes ou égales.
2. Montrer que G est l'union disjointe de ces doubles classes.
3. Est-ce que pour un groupe fini, le cardinal des doubles classes divise le cardinal de G ?
4. Soit K un corps, on pose $G = \mathrm{GL}_n(K)$ et $B \subset \mathrm{GL}_n(K)$ le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures.
   (a) Montrer qu'on a un plongement naturel $\mathfrak{S}_n \hookrightarrow G$.
   (b) Montrer la *décomposition de Bruhat*
$$G = \bigsqcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} B\sigma B.$$

3. On rappelle que le théorème de Cayley-Hamilton est vrai dans ce contexte.

Exercice 18. [Combinatoire quantique]

Soit K un corps et $n \geqslant 1$ un entier. On note $\mathrm{PGL}_n(K) = \mathrm{GL}_n(K)/K^\times$ le *groupe projectif linéaire*, c'est le quotient de $\mathrm{GL}_n(K)$ par son centre.

1. Soit $\mathbb{P}^n(K)$ l'ensemble des droites vectoriels de K^{n+1}. Montrer que $\mathbb{P}^n(K)$ est muni d'une action naturelle de $\mathrm{PGL}_n(K)$ qui est transitive et décrire le stabilisateur d'un point de $\mathbb{P}^n(K)$ sous cette action.
2. Soit m un entier tel que $m \leqslant n$. On définit la *Grassmanienne* $\mathrm{Gr}^n_m(K)$ comme l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension m de K^n.
   (a) Montrer qu'on a une bijection naturelle $\mathrm{Gr}^n_{n-m}(K) \cong \mathrm{Gr}^n_m(K)$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Gr}^n_m(K)$ est muni d'une action naturelle de $\mathrm{GL}_n(K)$ qui est transitive et décrire le stabilisateur d'un point.
   (c) On note $I_m = \{(i_1, \ldots, i_m) \mid 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_m \leqslant n\}$ et pour tout $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_m) \in I_m$, $|\mathbf{i}| = \sum_{j=1}^{n-1}(i_j - j)$. Montrer qu'on a une bijection naturelle [4]
   $$\mathrm{Gr}^n_m(K) = \bigsqcup_{\mathbf{i} \in I_m} K^{|\mathbf{i}|}.$$
   Décrire cette décomposition en termes d'orbites de $\mathrm{Gr}^n_m(K)$ sous l'action de $B \subset \mathrm{GL}_n(K)$, le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures.
3. On suppose dans toute la suite de l'exercice que K est un corps fini à q éléments.
   (a) Calculer le cardinal de $\mathrm{PGL}_n(K)$ comme fonction polynomiale de q.
   (b) On note $[n]_q$ le cardinal de $\mathbb{P}^{n-1}(K)$. Montrer que $[n]_q = 1 + q + \cdots + q^{n-1}$. On appelle le polynôme $[n]_q$ le *q-analogue* de n.
   (c) Soit $\mathscr{F}_n(K) = \{0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_{n-1} \subsetneq K^n \mid \dim_K V_i = i\}$ l'ensemble des *drapeaux* de K^n. On note $[n]_q!$ son cardinal. Montrer que $[n]_q! = \prod_{k=1}^n [k]_q$. On appelle le polynôme $[n]_q!$ la *q-factorielle de n.*
   (d) On note
   $$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[m]_q![n-m]_q!},$$
   le *q-coefficient binomial* m parmi n. Montrer que $\mathrm{Gr}^n_m(K)$ est de cardinal $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q$. En déduire la *$q$-formule de Pascal*
   $$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix}_q + q^{n-m} \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix}_q.$$
   (e) Montrer [5] la formule du *binôme quantique*,
   $$\sum_{m=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q q^{m(m+1)} t^m = \prod_{i=1}^{n} (1 + q^i t),$$
   comme égalité de polynômes en t.
   (f) Montrer la formule du *triple produit de Jacobi*,
   $$\prod_{m=1}^{+\infty} (1 - q^m)(1 + q^m t^{-1})(1 + q^{m-1} t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} q^{j(j-1)/2} t^j.$$

4. Hint : le pivot de Gauss.
5. L'exercice permet deux preuves différentes.