École Normale Supérieure, Année 2019-2020

1$^{\text{e}}$ année, Algèbre 1

TD n$^{\text{o}}$ 4 : Groupe symétrique et isomorphismes exceptionnels

---

Exercice 1.

Soit K un corps. On rappelle que $\mathrm{PGL}_n(K) = \mathrm{GL}_n(K)/K^\times$ est le *groupe projectif linéaire* et $\mathbb{P}^n(K)$ l'ensemble des droites vectorielles de K^{n+1}.

1. Rappeler l'action de $\mathrm{PGL}_{n+1}(K)$ sur $\mathbb{P}^n(K)$ et montrer qu'elle est fidèle et transitive.
2. Soit $K = \mathbb{F}_q$ le corps à q éléments. En déduire, pour $N = q^n + q^{n-1} + \cdots + 1$, une injection $\mathrm{PGL}_{n+1}(K) \hookrightarrow \mathfrak{S}_N$.
3. En déduire les isomorphismes exceptionnels suivants :

$$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_2) \cong \mathfrak{S}_3,\ \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3) \cong \mathfrak{S}_4,\ \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_4) \cong \mathfrak{A}_5.$$

Exercice 2.

Soit K un corps. On rappelle que $\mathrm{PSL}_n(K) = \mathrm{SL}_n(K)/Z(\mathrm{SL}_n(K))$ est le *groupe projectif spécial linéaire*.

1. Montrer que l'action de $\mathrm{PSL}_{n+1}(K)$ sur $\mathbb{P}^n(K)$ est fidèle et transitive.
2. Montrer que $\mathrm{PSL}_n(K)$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{PGL}_n(K)$ et que le quotient est isomorphe à $K^\times/(K^\times)^n$.
3. En déduire les isomorphismes exceptionnels suivants :

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_2) \cong \mathfrak{S}_3,\ \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \cong \mathfrak{A}_4,\ \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_4) \cong \mathfrak{A}_5.$$

4. Montrer que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5)$ est isomorphe à $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_4)$.

Exercice 3.

Soit $G_1 = \mathrm{PSL}_3(\mathbb{F}_4)$ et $G_2 = \mathrm{PSL}_4(\mathbb{F}_2)$. Le but est de montrer que G_1 et G_2 ne sont pas isomorphes.

1. Montrer que G_1 et G_2 ont même cardinal.
2. Montrer que G_2 admet deux classes de conjugaison d'éléments d'ordre 2.
3. Décrire les éléments d'ordre 2 de G_1.
4. Conclure.

Exercice 4.

Soit G un groupe et H, K deux sous-groupes de G. Soit $\phi\colon H \to K$ un isomorphisme. Montrer qu'il existe un morphisme injectif $G \hookrightarrow G_1$ et un automorphisme intérieur $\gamma \in \mathrm{Int}(G_1)$ tel que ϕ s'obtient comme la restriction de γ à H.

Exercice 5.

Soit $n \geq 1$ un entier. On rappelle que $\mathrm{Int}(\mathfrak{S}_n)$ désigne le sous-groupe des automorphismes *intérieurs* de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n)$, c'est-à-dire ceux de la forme $\sigma \mapsto g\sigma g^{-1}$ pour un certain $g \in \mathfrak{S}_n$.

1. Soit $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n)$ tel que ϕ transforme toute transposition en une transposition. Montrer que ϕ est intérieur.
2. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Déterminer le cardinal du commutant $Z(\sigma) := \{\tau \in \mathfrak{S}_n \mid \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma\ \}$ de σ.
3. En déduire que si $n \neq 6$, on a $\mathrm{Int}(\mathfrak{S}_n) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n)$.
4. Soit $n \geq 5$ tel que $\mathrm{Int}(\mathfrak{S}_n) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n)$. Montrer que tous les sous-groupes d'indice n de $\mathfrak{S}_n$ sont conjugués.
5. En déduire que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_6) \neq \mathrm{Int}(\mathfrak{S}_6)$.

Exercice 6.

Cet exercice est une légère reformulation du précédent. Soit $n \geqslant 1$ un entier.

1. Montrer que tout sous groupe d'indice n de $\mathfrak{S}_n$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$.
2. Si $n \neq 6$ montrer que les sous-groupes d'indice n de $\mathfrak{S}_n$ sont les stabilisateurs $\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(i) = i\}$ pour i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$.
3. Montrer que $\mathfrak{S}_6$ possède un sous-groupe d'indice 6 qui agit transitivement sur $\{1, \ldots, 6\}$. En déduire que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5) \cong \mathfrak{S}_5$ puis que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5)$ est simple.
4. En déduire que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_6)/\mathrm{Int}(\mathfrak{S}_6)$ est d'ordre 2.

Exercice 7. †

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Rappeler pourquoi les classes de conjuguaison de $\mathfrak{S}_n$ sont identifiées aux partitions de n. Déterminer les classes de conjugaison de $\mathfrak{A}_n$.

Exercice 8.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\mathfrak{S}_{n+2}$ admet deux sous-groupes non conjugués isomorphes à $\mathfrak{S}_n$.
2. Montrer que tout groupe fini G se plonge dans un groupe alterné, i.e. il existe un entier n et un morphisme injectif $G \hookrightarrow \mathfrak{A}_n$.

Exercice 9. [Droite projective et Birapport]

Soit K un corps. On note la droite projective $\mathbb{P}^1(K)$ l'ensemble des droites vectorielles de K^2.

1. Soit $\mathrm{PGL}_2(K) = \mathrm{GL}_2(K)/K^\times$ le *groupe projectif linéaire* des matrices inversibles de taille 2 modulo les matrices scalaires. Montrer que $\mathbb{P}^1(K)$ est muni d'une action naturelle transitive de $\mathrm{PGL}_2(K)$. Identifier $\mathbb{P}^1(K)$ à $K \cup \{\infty\}$ et décrire l'action sur $K \cup \{\infty\}$.
2. Pour n un entier, soit G un groupe agissant sur un ensemble X, on note X^n_{reg} l'ensemble des n-uplets $(x_1, \ldots x_n)$ de X tels que les x_i sont deux-à-deux distincts, muni de l'action diagonale de G. On rappelle que l'action de G sur X est *n-transitive* si l'action de G sur X^n_{reg} est transitive.
   (a) Montrer que l'action de $\mathrm{PGL}_2(K)$ sur $\mathbb{P}^1(K)$ est 3-transitive. Est-elle 4-transitive ?
   (b) Décrire les orbites de l'action de $\mathrm{PGL}_2(K)$ sur $(\mathbb{P}^1(K))^n_{\mathrm{reg}}$ pour $n = 2, 3, 4$.
   (c) En déduire une application surjective
   $$\lambda\colon\ \mathrm{PGL}_2(K)\backslash(\mathbb{P}^1(K))^3_{\mathrm{reg}} \times \mathbb{P}^1(K)) \to \mathbb{P}^1(K),$$
   que l'on identifiera par $\mathbb{P}^1(K) \cong K \cup \{\infty\}$ au *birapport* de quatre points sur la droite projective :
   $$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \times \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1}.$$
3. Décrire l'image par λ des orbites de l'action naturelle de $\mathfrak{S}_4$ sur $(\mathbb{P}^1(K))^4_{\mathrm{reg}}$. En déduire une action de $\mathfrak{S}_4$ sur $\mathbb{P}^1(K)$; se sont les *transformations anharmoniques*. Décrire les domaines fondamentaux de cette action (cf. TD3 Exercice 15) pour $K = \mathbb{C}$.
4. Supposons que $K = \mathbb{F}_7$. Le but de la suite est de déterminer un isomorphisme entre $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$ et $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$.On dit qu'un sous-ensemble $\{a, b, c\} \subset \mathbb{F}_7$ est un *triangle équilatéral* si $[\infty, a, b, c]$ est une racine cubique de l'unité.
   (a) Montrer que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$ agit sur les triangles équilatéraux de $\mathbb{F}_7$. Décrire les orbites et stabilisateurs de cette action.
   (b) Décrire le graphe d'incidence des triangles équilatéraux (i.e. dont les sommets sont les triangles qu'on relie par une arrête s'ils son adjacents).
   (c) Montrer que $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$ agit transitivement sur les points et les droites de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$.
   (d) On considère *la configuration de Fano* qui est le graphe d'incidence dont les sommets sont les points de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$ et les arrêtes sont les droites de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$.
   (e) En déduire une injection $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7) \hookrightarrow \mathrm{PGL}_3(\mathbb{F}_2)$ et conclure.