École Normale Supérieure, Année 2019-2020

1^{e} année, Algèbre 1

TD n° 5 : Produits semi-directs

Exercice 1.

1. Donner un exemple d'une suite exacte courte qui ne provient pas d'un produit semi-direct.
2. Montrer que $\mathfrak{S}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes_\phi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour un ϕ qu'on explicitera.
3. Montrer que $\mathfrak{A}_4 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \rtimes_\phi \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ pour un ϕ qu'on explicitera. Est-ce que, de même, $\mathfrak{S}_4$ est un produit semi-direct de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ par un sous-groupe d'ordre 6 ?
4. Soit $B \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures. Montrer que $B \cong \mathbb{Q} \rtimes_\phi (\mathbb{Q}^\times)^2$ pour un ϕ qu'on explicitera.
5. Montrer que pour $n \geqslant 2$ un entier on a $\mathfrak{S}_n = \mathfrak{A}_n \rtimes_\phi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour un ϕ qu'on explicitera. Ce produit semi-direct est-il direct ?

Exercice 2.

Soient H et N deux groupes et ϕ, ψ deux morphismes $H \to \mathrm{Aut}(N)$. Montrer que :

1. S'il existe un automorphisme α de H tel que $\psi = \phi \circ \alpha$, alors $N \rtimes_\psi H \cong N \rtimes_\phi H$.
2. S'il existe un automorphisme u de N tel que $\forall h \in H$, $\phi(h) = u\psi(h)u^{-1}$, alors $N \rtimes_\psi H \cong N \rtimes_\phi H$.
3. Si H et monogène et si $\psi(H) = \phi(H)$ alors $N \rtimes_\psi H \cong N \rtimes_\phi H$.
4. Ces conditions sont-elles nécessaires ?

Exercice 3.

Soit K un corps et $n \geqslant 1$ un entier. Montrer que $\mathrm{GL}_n(K) \cong \mathrm{SL}_n(K) \rtimes_\phi K^\times$ pour un ϕ qu'on explicitera. Déterminer les cas où ce produit est direct.

Exercice 4.

Soit G un groupe tel que $Z(G) = \{e\}$. On note $A = \mathrm{Aut}(G)$ le groupe des automorphismes de G et $I = \mathrm{Int}(G)$ le groupe des automorphismes intérieurs. Soit $\Gamma = A/I$ le groupe des automorphismes extérieurs.

1. Montrer que $G \cong \mathrm{Int}(G)$.
2. Montrer que $A \cong G \times \Gamma$ si et seulement si $\Gamma = \{e\}$
3. On suppose que $\Gamma = \{e\}$. Soit E un groupe contenant un sous-groupe distingué isomorphe à G. Montrer que alors $E \cong G \times E/G$.

Exercice 5.

Soit $G = N \rtimes_\psi H$ et soit K un sous-groupe de G contenant N. Montrer que $K = N \rtimes_\psi (H \cap K)$.

Exercice 6.

Soit p et q deux nombres premiers. Soit G un groupe d'ordre pq.

1. Montrer que G est un produit semi-direct de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.
2. Déterminer les cas où se produit semi-direct est un produit direct.
3. Classifier les groupes d'ordre pq.
4. En déduire qu'un groupe non abélien d'ordre $2p$ est le groupe diédral D_p.

Exercice 7. †

Soit G un groupe et A un groupe commutatif. Soit $\tau\colon G \to \mathrm{Aut}(A)$ un morphisme. Pour $a \in A$ et $g \in G$ on utilisera la notation ${}^g a$ pour désigner $\tau(g)(a)$. On note $Z(G,A)$ le groupe commutatif des *morphismes croisés*, i.e. des applications $\phi\colon G \to A$ tels que

$$\forall g, g' \in G,\ \ \phi(gg') = \phi(g) + {}^g\phi(g').$$

1. Pour tout $a \in A$, on définit $\theta_a\colon g \mapsto {}^g a - a$. Montrer que $a \to \theta_a$ définit un morphisme $\theta\colon A \to Z(G,A)$. Identifier le noyau de θ. On notera $B(G,A)$ l'image de θ.
2. Montrer qu'on a une bijection naturelle entre $Z(G,A)$ et l'ensemble des sections $G \to A \rtimes_\tau G$. Montrer que deux sections ϕ_1 et ϕ_2 sont conjugués par A si et seulement si $\phi_1 - \phi_2 \in B(G,A)$.
3. Soit
$$1 \to H \to E \to G \to 1$$
une suite exacte courte telle que $Z(H) = A$. Montrer que $Z(G,A) \cong \mathrm{Aut}(E)$ et $B(G,A) \cong \mathrm{Int}(E)$.

Exercice 8. †

Cet exercice fait suite au précédent. Soit $C(G,A)$ l'ensemble des applications $G \to A$. On note $\sigma\colon G \to \mathrm{Aut}(C(G,A))$ l'application définie par l'action

$$\forall \phi \in C(G,A),\ \forall g, g' \in G,\ \ ({}^g\phi)(g') = {}^g\phi(g^{-1}g').$$

1. Montrer que σ définit bien un morphisme de groupe.
2. Soit $\epsilon\colon A \to C(G,A)$ l'application telle que pour tout $a \in A$, $\epsilon(a)$ est l'application constante sur G égale à a. Montrer que ϵ définit un morphisme injectif compatible à l'action de G.
3. Soit $E_0 = C(G,A) \rtimes_\sigma G$ et soit $E = A \rtimes_\tau G$. Construire un morphisme $\Phi\colon E \to E_0$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon"] & E \arrow[r] \arrow[d, "\Phi"] & G \arrow[d, "\mathrm{id}_G"] \\ C(G,A) \arrow[r] & E_0 \arrow[r] & G \end{tikzcd}.$$

4. On appelle *G-moyenne* sur A un morphisme $m\colon C(G,A) \to A$ compatible à l'action de G et tel que $m \circ \epsilon = \mathrm{id}_A$. Si A admet une G-moyenne on dit qu'il est *G-moyennable*. Montrer que si A et G-moyennable alors $Z(G,A) = B(G,A)$.
5. Supposons que G est un groupe fini d'ordre n et que $a \mapsto na$ est un automorphisme de A. Montrer qu'alors $Z(G,A) = B(G,A)$.