École Normale Supérieure, Année 2019-2020

1$^{\text{e}}$ année, Algèbre 1

TD n° 6 : Théorèmes de Sylow et groupes simples

Exercice 1.

Soit G un groupe simple et soit p un nombre premier qui divise l'ordre de G. On note n_p le nombre de p-Sylow de G. Montrer que $n_p!$ est divisible par l'ordre de G.

Exercice 2.

Soit p et q deux nombres premiers disctincts.

1. Classifier, à isomorphisme près, les groupes d'ordre pq.
2. † Classifier, à isomorphisme près, les groupes d'ordre p^2q.
3. Montrer qu'il n'existe pas de groupe simple d'ordre p^3q.

Exercice 3.

1. Montrer que tout groupe simple d'ordre strictement inférieur à 60 est monogène.
2. Décrire les classes de conjugaison de $\mathfrak{A}_5$. En déduire qu'il existe un groupe simple d'ordre 60.
3. Montrer [1] qu'il n'y a qu'un seul groupe simple d'ordre 60.

Exercice 4.

Le but de cet exercice est de montrer qu'un groupe d'ordre 180 n'est pas simple.

1. Compter le nombre de 5-Sylow et de 3-Sylow d'un tel groupe.
2. Montrer [2] que deux 3-Sylow distincts ne peuvent pas contenir un même élément $g \neq e$.
3. Conclure.

Exercice 5.

Soit p_1, p_2 et p_3 des nombres premiers distincts tels que p_i ne divise pas $p_j - 1$ pour $i \neq j$. Montrer que tout groupe d'ordre $p_1p_2p_3$ est cyclique. En déduire que tout groupe d'ordre 255 est cyclique.

Exercice 6. [Groupes d'ordre p^3]

Soit p un nombre premier. Le but de cet exercice est de classifier, à isomorphisme près, les groupes d'ordre p^3.

1. Rappeler la classification des groupes d'ordre p et p^2. Rappeler la classification des groupes d'ordre 8. On supposera dans la suite que $p \neq 2$.
2. Déterminer les p-Sylow de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$.
3. En déduire qu'il existe un unique produit semi-direct non trivial $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Montrer que son centre est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
4. Soit G un groupe non abélien d'ordre p^3 contenant un élément d'ordre p^2. Montrer que G est l'unique produit semi-direct non trivial de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.
5. Conclure.

---

1. *Hint :* Montrer qu'un tel groupe a cinq ou quinze 2-Sylow. Puis, montrer qu'il contient un sous-groupe d'ordre 12.
2. *Hint :* Considérer les ordres possibles pour le centralisateur de g et rappeler vous qu'un groupe d'ordre 18 contient un unique 3-Sylow.

Exercice 7. [La méthode d'Iwasawa]†

Le but de cet exercice est de montrer un critère dû à Iwasawa qui permet d'établir la simplicité de certains groupes. On en déduira deux familles infinies de groupes simples :

- les groupes $\mathrm{PSL}_n(K)$ sont simples, sauf pour l'entier $n = 2$ et les corps $K = \mathbb{F}_2$ et $K = \mathbb{F}_3$,
- Les groupes $\mathfrak{A}_n$ sont simples pour $n \geqslant 5$.

1. Soit G un groupe agissant sur un ensemble X. On dit que l'action est *primitive* si elle est transitive et si pour tout $x \in X$ le stabilisateur G_x est un sous-groupe maximal de G, i.e. tout sous-groupe strict de G contenant G_x est égal à G_x. Montrer qu'une action 2-transitive est primitive.
2. On montre maintenant le critère d'Iwasawa. On suppose que G agit primitivement sur un ensemble X. On se donne pour tout $x \in X$ un sous-groupe abélien T_x de G tel que
   - pour tout $g \in G$, $T_{g \cdot x} = gT_xg^{-1}$,
   - la réunion $\bigcup_{x \in X} T_x$ engendre G.

   Alors (on veut montrer que) tout sous-groupe distingué de G qui agit non-trivialement sur X contient $D(G)$, le *sous-groupe dérivé de* G[3]. Soit H un sous-groupe distingué de G agissant non trivialement sur X.
   (a) Soit $x \in X$, montrer que $HG_x = G$.
   (b) Soit $x \in X$, montrer que $G = HT_x$.
   (c) Conclure.
3. On se propose maintenant d'utiliser ce critère pour montrer la simplicité des groupes spéciaux projectifs linéaires.
   (a) Montrer[4] que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_2)$ et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3)$ ne sont pas simples. On supposera dans la suite que si $n = 2$, K n'est pas $\mathbb{F}_2$ ou $\mathbb{F}_3$.
   (b) Montrer que $D(\mathrm{PSL}_n(K)) = \mathrm{PSL}_n(K)$.
   (c) Pour tout $x \in \mathbb{P}^{n-1}(K)$ une droite vectorielle de K^n, on définit T_x l'ensemble des transvections de droite x, i.e. les automorphismes de K^n de la forme $v \mapsto v + l(v)a$ pour $l \colon K^n \to K$ une forme linéaire et $a \in x$ un vecteur non-nul tel que $l(a) = 0$. Montrer que l'ensemble des T_x vérifie les hypothèses du critère d'Iwasawa.
   (d) Conclure.
4. On se propose maintenant d'utiliser ce critère pour montrer la simplicité des groupes alternés.
   (a) Rappeler pourquoi $\mathfrak{A}_3$ est simple et pourquoi $\mathfrak{A}_4$ n'est pas simple. On supposera dans la suite que $n \geqslant 5$.
   (b) Montrer que $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les 3-cycles. En déduire que $D(\mathfrak{A}_n) = \mathfrak{A}_n$.
   (c) Soit X l'ensemble des triplets $(a, b, c) \in \{1, \ldots, n\}^3$ tels que a, b et c sont deux à deux distincts. Pour $x = (a, b, c) \in X$, on définit T_x le sous-groupe engendré par le 3-cycle $(a\ b\ c)$. Montrer que l'ensemble des T_x vérifie les hypothèses du critère d'Iwasawa.
   (d) Conclure.

Exercice 8. †

1. Montrer que tout groupe simple d'ordre n tel que $60 < n < 168$ est monogène.
2. Soit G un groupe simple d'ordre 168. Montrer que $G \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$.
3. En déduire l'isomorphisme exceptionnel suivant :

$$\mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_2) \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7).$$

---

3. On rappelle que pour un groupe G, on note $D(G)$ le sous-groupe engendré par les commutateurs de G, i.e. le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $xyx^{-1}y^{-1}$ pour $x, y \in G$.
4. *Hint :* Penser aux isomorphismes exceptionnels !

Exercice 9. [Groupe simple d'ordre 360]†

On se propose de montrer qu'il existe un unique groupe simple d'ordre 360.

1. Montrer que G admet dix 3-Sylow.
2. Montrer que G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{A}_{10}$. On supposera désormais que G est un sous-groupe de $\mathfrak{A}_{10}$.
3. Soit S un 3-Sylow de G. Montrer que S n'est pas cyclique, et que l'on peut supposer que $N_G(S)$ est le stabilisateur de 10 dans $G \subset \mathfrak{A}_{10}$.
4. Montrer que l'action de S sur $\{1, 2, \ldots, 9\}$ est libre.
5. Montrer que l'on peut supposer que S est engendré par les éléments $x = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6)(7\ 8\ 9)$ et $y = (1\ 4\ 7)(2\ 5\ 8)(3\ 6\ 9)$.
6. Montrer que le stabilisateur P de 1 dans $N_G(S)$ est cyclique d'ordre 4 et est un 2-Sylow de $N_G(S)$. On note z un générateur de P.
7. Montrer qu'on peut supposer que $z = (2\ 4\ 3\ 7)(5\ 6\ 9\ 8)$.
8. Soit T un 2-Sylow de G contenant z. Montrer que T contient un élément t d'ordre 2 et que T est engendré par z et t.
9. Montrer que l'on peut supposer que $t = (1\ 10)(2\ 3)(5\ 6)(8\ 9)$.
10. Montrer que G est engendré par x, y, z et t.
11. Conclure.
12. Montrer l'isomorphisme exceptionnel suviant :
$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_9) \cong \mathfrak{A}_6$$
13. En déduire que $\mathfrak{S}_6$ a un automorphisme extérieur et que $\mathfrak{A}_6$ a trois automorphismes extérieurs.

Exercice 10. [Morphisme de transfert]†

Soit G un groupe fini et soit $n \geqslant 1$ un entier.

1. Soit H un sous-groupe de G d'indice n. Soit $x_1, \ldots, x_n \in G$ des représentants du quotient G/H. L'action de G sur G/H induit une action de G sur $\{1, \ldots, n\}$. Pour tout ïi tel que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $g \in G$ il existe $h_{i,g\cdot i}$ tel que $gx_i = x_{g\cdot i}h_{i,g\cdot i}$. On note de plus $\pi\colon H \to H/D(H)$ la projection canonique où $D(H)$ est le groupe dérivé de H. On définit une application $V\colon G \to H/D(H)$ par
$$\text{pour } g \in G,\ V(g) = \pi\left(\prod_{i=1}^{n} h_{i,g\cdot i}\right).$$
Montrer que V est un morphisme bien défini, indépendant du choix des représentants x_i. C'est le *morphisme de transfert*.
2. On garde les notations précédentes. Pour $h \in H$, on note $\langle h\rangle$ le sous-groupe cyclique engendré par H que l'on fait agir sur G/H. Soit $g_1, \ldots g_r$ des représentants des orbites pour cette action et on note $[g_i]$ la classe modulo H de ces représentants. Pour tout indice i soit n_i l'entier minimal non nul tel que $h^{n_i} \cdot [g_i] = [g_i]$. Montrer que
$$V(h) = \pi\left(\prod_{i=1}^{r} g_i^{-1} h^{n_i} g_i\right).$$
3. Soit p un nombre premier divisant l'ordre de G. Soit S un p-Sylow de G et $A, B \subset S$ des parties stables par conjugaison dans S. Montrer[5] que si A et B sont conjugués dans G, alors elles le sont dans $N_G(S)$, le normalisateur de S dans G.
4. Soit S un p-Sylow de G tel que $S \subset Z(N_G(S))$. Montrer que le morphisme de transfert $V\colon G \to S$ est surjectif. En déduire qu'il existe un sous-groupe distingué H de G tel que S soit isomorphe à G/H.
5. Soit G un groupe simple d'ordre m qui n'est pas monogène. Montrer l'alternative suivante :
   - Soit m est divisible par 12.
   - Soit, pour p le plus petit nombre premier qui divise m, $v_p(m) \geqslant 3$.

5. *Hint :* Considérer deux p-Sylow de $N_G(A)$.