École Normale Supérieure, Année 2019-2020

1e année, Algèbre 1

TD n° 7 : Groupes nilpotents et résolubles, suites de Jordan-Hölder et groupes libres

---

Exercice 1. [Vrai ou Faux]

Justifier si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

1. Un groupe résoluble est nilpotent.
2. Le centre d'un groupe résoluble n'est pas trivial.
3. Soit G un groupe et H un sous-groupe distingué de G. Alors si G/H et H sont nilpotents, G aussi est nilpotent.
4. Soit p, q, r trois nombres premiers. Alors un groupe d'ordre pqr est résoluble.
5. Soit G un groupe nilpotent et H un sous-groupe maximal de G, i.e. le seul sous-groupe de G contenant strictement H est G lui-même. Alors H est un sous-groupe distingué de G.

Exercice 2.

Démontrer que tout nombre entier s'écrit de façon unique, à inversible et permutation des facteurs près, comme produit de nombres premiers en utilisant le théorème de Jordan-Hölder.

Exercice 3.

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Décrire les groupes suivants en terme de générateurs et relations

1. Le groupe des quaternions unitaires Q_8.
2. Le groupe diédral D_n de cardinal $2n$.
3. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.
4. Le groupe alterné $\mathfrak{A}_n$.
5. † Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Exercice 4. [Sous-groupes de Frattini]

Soit G un groupe de type fini. On note $\phi(G)$ le *sous-groupe de Frattini*, l'intersection des sous-groupes maximaux de G.

1. Montrer que $\phi(G)$ n'est pas vide. Qu'en est-il si on ne suppose plus G de type fini ?
2. Soit $n \geqslant 1$ un entier, calculer $\phi(\mathfrak{S}_n)$.
3. Montrer que $\phi(G)$ est stable par tout automorphisme de G (on dit que c'est un sous-groupe *caractéristique*). En particulier, $\phi(G)$ est distingué et on note $\pi\colon G \to G/\phi(G)$ la projection canonique.
4. Soit S une partie de G. Montrer que S engendre G si et seulement si $\pi(S)$ engendre $G/\phi(G)$.
5. Montrer que $\phi(G)$ est l'ensemble des $g \in G$ tel que pour toute partie S de G si S et g engendrent G alors S engendre G.
6. Montrer que si G est fini alors $\phi(G)$ est nilpotent.
7. Montrer que si G est fini et nilpotent alors $D(G) \subset \phi(G)$.
8. On suppose que G est un p-groupe.
   (a) Montrer que $\phi(G)$ contient $D(G)$ et G^p i.e. les puissances p-ième des éléments de G.
   (b) Montrer que $G/\phi(G)$ est le plus grand quotient abélien de G d'exposant p.
   (c) Quel est le nombre minimal de générateurs de G ? L'exprimer à l'aide de $G/\phi(G)$.
   (d) Montrer que $\phi(G) = D(G) \cdot G^p$.

Exercice 5.

Soit G un groupe de type fini. Pour toute partie A génératrice de G et tout entier $m \leqslant 1$, on note $B_{G,A}(m)$ l'ensemble des éléments de G qui s'écrivent comme produit d'aux plus m éléments de $A \cup A^{-1}$. On pose $\beta_{G,A}(m) = \mathrm{Card}(B_{G,A}(m))$. Pour β et β' deux fonctions $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, on notera $\beta \preceq \beta'$ s'il existe $c > 0$ et $a \in \mathbb{N}^*$ tels que pour tout n, $\beta(n) \leq c\beta'(an)$, et $\beta \sim \beta'$ si $\beta \preceq \beta'$ et $\beta' \preceq \beta$.

1. Montrer que $B_{G,A}(m)$ est une boule pour une distance sur G qu'on précisera
2. Soient A et A' deux parties génératrices finies de G. Montrer que $\beta_{G,A} \sim \beta_{G,A'}$. On notera donc abusivement $\beta_G = \beta_{G,A}$.
3. Calculer β_G si G est un groupe fini, si $G = \mathbb{Z}$, si $G = \mathbb{Z}^n$, si G est le groupe libre à n générateurs (i.e. le groupe des mots finis sur un alphabet de n lettres, avec leurs inverses, pour la loi de concaténation des mots).
4. Montrer que $\beta_G(n) \preceq e^n$.
5. Si G' est un groupe de type fini, calculer $\beta_{G\times G'}$.
6. Montrer que si $H \subset G$ est un sous-groupe de type fini, alors $\beta_H \preceq \beta_G$, et si H est d'indice fini, alors $\beta_H \sim \beta_G$.
7. Soit H un quotient de G. Comparer β_H et β_G.
8. Montrer[1] que si $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, alors $\beta_G(n) \sim e^n$.
9. Montrer que si G est nilpotent de classe 2, alors il existe $d \geq 0$ tel que $\beta_G(n) \preceq n^d$.
10. Montrer que si G est nilpotent, alors il existe $d \geq 0$ tel que $\beta_G(n) \preceq n^d$.
11. Montrer que le groupe $G = \mathbb{Z}^2 \rtimes_C \mathbb{Z}$, où le produit semi-direct est défini via la matrice $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, est un groupe résoluble tel que $\beta_G(n) \sim e^n$.

Exercice 6.

On note Σ^* l'ensemble des mots (finis) sur l'alphabet $\Sigma = \{0;1\}$, i.e. $\Sigma^* := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Sigma^n$. On note G le groupe $\mathfrak{S}(\Sigma^*)$. On note $a \in G$ l'élément défini par $a(1m) := 0m$ et $a(0m) := 1m$ pour tout $m \in \Sigma^*$.

1. Montrer que les formules suivantes définissent des éléments b, c et d de G : $b(0m) = 0a(m)$, $c(0m) = 0a(m)$, $d(0m) = 0m$, $b(1m) = 1c(m)$, $c(1m) = 1d(m)$ et $d(1m) = 1b(m)$. On note $\Gamma = \langle a, b, c, d\rangle \subset G$.
2. Montrer que $a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = \mathrm{id}$ et que $bc = cb = d$, $cd = dc = b$, $bd = db = c$.
3. Montrer que tout élément de Γ s'écrit comme produit des éléments a, b, c, d, avec un terme du produit sur deux égal à a.
4. Pour tout $n \geq 1$, on note $\Gamma_n = \{\gamma \in \Gamma : \gamma_{|\Sigma^n} = \mathrm{id}\}$. Montrer que Γ_n est un sous-groupe distingué strict d'indice fini de Γ.
5. On définit $\varphi_1 : \Gamma_1 \to G \times G$ par $\varphi_1(\gamma) := (\gamma_0, \gamma_1)$, où $\gamma_\epsilon(w)$ est le mot tel que $\gamma(\epsilon w) = \epsilon\gamma_\epsilon(w)$. Montrer que φ_1 défini bien un morphisme de groupes injectif.
6. Montrer que les morphismes $\varphi^\epsilon : \Gamma_1 \to \Gamma$ définis par $\gamma \mapsto \gamma_\epsilon$ sont surjectifs. En déduire que Γ est infini.
7. Montrer que $\varphi_1(\Gamma_1)$ est un sous-groupe d'indice fini de $\Gamma \times \Gamma$.
8. Montrer que Γ n'est pas à croissance polynomiale, i.e. pour tout $d \geq 0$, $n^d \preceq \beta_\Gamma(n)$.
9. Montrer que pour tout $\gamma \in \Gamma_1$, $l(\gamma_0) + l(\gamma_1) \leq l(\gamma) + 1$, où $l(g)$ désigne le nombre minimal de symboles a, b, c, d nécessaires pour écrire g.
10. Pour tout $n \geq 1$, généraliser les contructions précédentes pour obtenir un morphisme injectif $\varphi_n : \Gamma_n \to \Gamma^{\Sigma^n}$ tel que $\varphi_n(\Gamma_n)$ est un sous-groupe d'indice fini de Γ^{Σ^n}.
11. Montrer que pour tout $\gamma \in \Gamma_3$, si on note $\varphi_3(\gamma) = (\gamma_\epsilon)_{\epsilon\in\Sigma^3}$, alors

$$\sum_{\epsilon\in\Sigma^3} l(\gamma_\epsilon) \leq \frac{5}{6} l(\gamma) + 8\,.$$

1. *Hint :* Utiliser que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est de type fini.

Exercice 7. [Théorème de Schur-Zassenhaus][†]

On considère une suite exacte de groupes finis

$$1 \to N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} K \to 1,$$

et on suppose que Card(K) est premier à Card(N). On se propose de démontrer le *théorème de Schur-Zassenhaus*, qui affirme qu'une telle suite exacte est nécessairement scindée ; puis on donne quelques applications.

1. On suppose ici N abélien. On se propose de démontrer le théorème dans ce cas. Soit $s_0 : K \to G$ une application telle que $\pi \circ s_0 = \mathrm{id}_K$.
   (a) Montrer que l'action par conjugaison de G sur N induit un morphisme $\varphi\colon K \to \mathrm{Aut}(N)$
   (b) Montrer que pour tous $x, y \in K$, il existe un unique $f(x,y) \in N$ tel que
   $$s_0(xy) = \iota(f(x,y))s_0(x)s_0(y).$$
   (c) Montrer que pour tous $x, y, z \in K$, on a
   $$f(x,y)f(xy,z) = \varphi(x)(f(y,z))f(x,yz).$$
   (d) On pose $k = \mathrm{Card}(K)$. Pour tout $x \in K$, on note $c(x)$ l'unique élément de N tel que
   $$c(x)^k = \prod_{y \in K} f(x,y).$$
   Montrer que l'application $s\colon x \mapsto \iota(c(x))s_0(x)$ est un morphisme de groupes de K vers G, définissant une section de la suite exacte considérée.
   (e) Conclure dans le cas ou N est abélien.
2. On démontre maintenant le théorème de Schur-Zassenhaus.
   (a) Montrer le théorème dans le cas où N est un p-groupe, pour un certain p.
   (b) Montrer le théorème[2] dans le cas où N admet un p-Sylow $P \neq \{1\}$ qui est distingué dans G.
   (c) On suppose que N admet un p-Sylow P qui n'est pas distingué dans G. Montrer que $G = N_G(P)N$. Conclure dans ce cas.
   (d) Conclure[3].
3. On suppose que N soit résoluble. Soient $s_1, s_2 : K \to G$ des sections de la suite exacte. Montrer qu'il existe un élément $g \in G$ tel que
   $$\forall x \in K, \quad s_2(\pi(g)x\pi(g)^{-1}) = gs_1(x)g^{-1}.$$
4. Montrer le *théorème de Hall* : Soit G un groupe fini résoluble, et soit d un diviseur de Card(G) qui est premier à $\frac{\mathrm{Card}(G)}{d}$. Alors les sous-groupes d'ordre d de G sont deux à deux conjugués, et tout sous-groupe de G d'ordre divisant d est contenu dans un sous-groupe d'ordre d.

2. *Hint :* Considérer la suite exacte
$$1 \to N/P \to G/\iota(P) \to K \to 1.$$

3. *Hint :* Raisonner par récurrence sur le cardinal de G