École Normale Supérieure,   Année 2019-2020

1^e année, Algèbre 1

TD n° 8 : Algèbre linéaire et multilinéaire

Dans ce TD K est un corps et une K-algèbre sera toujours supposée associative et unitaire.

Exercice 1.

Soit A et B deux K-algèbres.

1. Montrer qu'il existe une unique structure de K-algèbre $A \otimes_K B$ telle que pour $a, a' \in A$ et $b, b' \in B$ on a
$$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = aa' \otimes bb'.$$
2. Montrer que pour C une K-algèbre commutative et $f \colon A \to C$, $g \colon B \to C$ une paire de morphismes de K-algèbres il existe un unique morphisme de K-algèbres $f \otimes g \colon A \otimes_K B \to C$ tel que pour tout $a \in A$ et $b \in B$ on a
$$(f \otimes g)(a \otimes b) = f(a)g(b).$$
3. Montrer que si $A = K[X]$ et $B = K[Y]$ alors $A \otimes_K B \cong K[X, Y]$ en tant que K-algèbres. Si $A = K(X)$ et $B = K(Y)$ a-t-on $A \otimes_K B \cong K(X, Y)$? A-t-on au moins une inclusion ?
4. Si on a $A \otimes_K B \cong K$, est-ce que nécessairement $A \cong K$ et $B \cong K$?

Exercice 2.

On dit qu'une K-algèbre graduée A est *super-commutative* si $a \cdot a' = (-1)^{(\deg a)(\deg a')} a' \cdot a$ pour tout $a, a' \in A$.

1. Si V est un espace vectoriel sur K montrer que $\bigwedge V$ est une K-algèbre super-commutative.
2. Soit A et B deux K-algèbres super-commutatives. Montrer qu'on peut munir naturellement $A \otimes_K B$ d'une structure d'algèbre super-commutative sur K. On notera cette algèbre $A \otimes_K^{\mathrm{su}} B$.
3. Soit V et V' deux espaces vectoriels sur K. Montrer que
$$\mathrm{Sym}(V \oplus V') \cong \mathrm{Sym}(V) \otimes_K \mathrm{Sym}(V'), \quad \text{et} \quad \bigwedge(V \oplus V') \cong \bigwedge V \otimes_K^{\mathrm{su}} \bigwedge V'.$$
4. Soit V un espace vectoriel sur K, montrer qu'on a un isomorphisme canonique de K-algèbres
$$\left(\bigwedge V\right)^* \cong \bigwedge V^*.$$

Exercice 3.

Pour $n \geqslant 1$ un entier on note $\mathrm{M}_n(K)$ la K-algèbre des matrices $n \times n$. Soit $\mathbb{H}$ *l'algèbre des quaternions* : c'est la $\mathbb{R}$-sous-algèbre de $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ engendré par les matrices suivantes
$$i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \; j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; k = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier que $\mathbb{H}$ n'est pas isomorphe à $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ en tant que $\mathbb{C}$-algèbres.
3. Montrer que $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \cong \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ en tant que $\mathbb{R}$-algèbres.

Exercice 4.

Soit V_1 et V_2 deux espaces vectoriels sur K de dimension finie. Que vaut
$$\max_{x \in V_1 \otimes V_2} \min \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \exists (e_1, \ldots, e_n) \in V_1^n \text{ et } (f_1, \ldots, f_n) \in V_2^n \,,\, x = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes f_i \right\} ?$$

Exercice 5.

Soit

$$0 \to V_1 \to V_2 \to V_3 \to 0$$

une suite exacte[1] de K-espaces vectoriels. Soit U un K-espace vectoriel.

1. Montrer qu'on a (naturellement) une suite exacte de K-espaces vectoriels

$$0 \to V_1 \otimes_K U \to V_2 \otimes_K U \to V_3 \otimes_K U \to 0.$$

2. Montrer qu'on a (naturellement) une suite exacte de K-espaces vectoriels

$$0 \to \mathrm{Hom}(V_3, U) \to \mathrm{Hom}(V_2, U) \to \mathrm{Hom}(V_1, U) \to 0.$$

   En particulier pour $U = K$ on obtient

$$0 \to V_3^* \to V_2^* \to V_1^* \to 0.$$

3. Montrer qu'on a (naturellement) une suite exacte K-espaces vectoriels

$$0 \to \mathrm{Hom}(U, V_1) \to \mathrm{Hom}(U, V_2) \to \mathrm{Hom}(U, V_3) \to 0.$$

4. A-t-on des énoncés similaires en appliquant End, T, Sym ou $\bigwedge$ à la suite exacte ?

Exercice 6. [Changement de base]

Soit L un corps contenant K vu comme un espace vectoriel sur K. Soit V un espace vectoriel sur K. Montrer qu'on a des isomorphismes canoniques de L-algèbres.

$$\mathrm{End}_L(V \otimes_K L) \cong \mathrm{End}_K(V) \otimes_K L, (V \otimes_K L)^* \cong V^* \otimes_K L,$$

et des isomorphismes canoniques de L-algèbres graduées

$$\mathrm{T}_L(V \otimes_K L) \cong \mathrm{T}_K(V) \otimes_K L,\ \mathrm{Sym}_L(V \otimes_K L) \cong \mathrm{Sym}_K(V) \otimes_K L,\ \bigwedge_L(V \otimes_K L) \cong \bigwedge_K(V) \otimes_K L.$$

Exercice 7.

Le but de cet exercice est de réinterpréter canoniquement, en terme des opérations vu en cours, certaines manipulations classiques sur les matrices.

1. Soit $n, m \geqslant 1$ des entiers. Soit $u\colon K^n \to K^m$ une application linéaire. Décrire matriciellement[2] le morphisme gradué canonique $\Lambda(u)\colon \bigwedge K^n \to \bigwedge K^m$. Quel est le rang sur les parties graduées ?
2. Pour $n \geqslant 1$ un entier, en déduire que pour tout entier r tel que $n \geqslant r \geqslant 1$ on obtient un morphisme de groupes $\Lambda^r\colon\ \mathrm{GL}_n(K) \to \mathrm{GL}_{\binom{n}{r}}(K)$. Les représentations $\{\Lambda^r\}_{1 \leqslant r \leqslant n}$ ainsi obtenues sont parfois appelées *représentations fondamentales*.
3. Soit $n_1, n_2, n_3 \geqslant 1$ des entiers. Soit $u\colon K^{n_1} \to K^{n_2}$ et $v\colon K^{n_2} \to K^{n_3}$ des applications linéaires. Montrer que $\Lambda(u \circ v) = \Lambda(u) \circ \Lambda(v)$. Écrire matriciellement cette relation, on retrouve la formule de *Cauchy-Binet*.
4. Soit $n, m \geqslant 1$ des entiers. Soit $u\colon K^n \to K^n$ un endomorphisme. Identifier l'application canonique $\Lambda^m(u) \wedge \Lambda^{n-m}(u)$ au déterminant et retrouver matriciellement la *formule de Laplace* du développement par bloc du déterminant.
5. Soit $n \geqslant 1$ deux entiers. Soit $u\colon K^n \to K^n$ un endomorphisme. Décrire les valeurs propres de $\Lambda(u)$ à partir de celles de u. En déduire que si on note $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_n$ le polynôme caractéristique de u, alors pour tout indice r on a

$$a_r = (-1)^{n-r}\,\mathrm{Tr}(\Lambda^r(u)).$$

1. La définition est similaire à celle des groupes. On peut comprendre cette suite comme : "V_3 est l'espace vectoriel quotient de V_2 par l'inclusion de V_1".
2. Les coefficients sont les mineurs de la matrice !

Exercice 8. [Retour sur le produit extérieur et symétrique]

Ces exercices sont à destination de ceux qui veulent apprendre le produit extérieur et symétrique. Ces propriétés sont démontrés dans le cours ; le but ici est simplement de donner un support pour les refaire à la main et s'entrainer à manipuler ces constructions. On fixe un corps K.

1. Soit A une K-algèbre et I un idéal bilatère de A.
   (a) Montrer que A/I peut être muni d'une structure de K-algèbre canonique telle que la projection $\pi\colon A \to A/I$ est un morphisme d'algèbre. Montrer que pour toute K-algèbre B la projection π établit une bijection naturelle entre les morphismes de K-algèbres $A \to B$ qui s'annulent sur I et les morphismes $A/I \to B$.
   (b) Supposons que A est une K-algèbre graduée, i.e. $A = \bigoplus_{n \geqslant 0} A_n$ tel que $1 \in A_0$ et $A_n \cdot A_m \subset A_{n+m}$ pour tout entiers $n, m \geqslant 0$; un élément contenu dans l'un des A_n est appelé *élément homogène*. Montrer qu'un idéal I est engendré par des éléments homogènes si et seulement si
   $$I = \bigoplus_{n \geqslant 0} (I \cap A_n).$$
   On dit alors que I est un *idéal homogène*. Reprendre la question précédente en remplaçant "K-algèbre" par "K-algèbre graduée" et "idéal bilatère" par "idéal bilatère homogène".
2. Soit $V_1, \dots, V_n$ des K-espaces vectoriels. Expliquer pourquoi l'écriture $V_1 \otimes_K \cdots \otimes_K V_n$ a bien un sens et montrer qu'on a un morphisme canonique $V_1 \times \cdots \times V_n \to V_1 \otimes_K \cdots \otimes_K V_n$. Montrer que pour tout K-espace vectoriel W on a une bijection naturelle entre les applications n-linéaires $V_1 \times \cdots \times V_n \to W$ et les applications linéaires $V_1 \otimes_K \cdots \otimes_K V_n \to W$, donnée par le morphisme canonique précédent.
3. Soit V un K-espace vectoriel. Pour tout entier $n \geqslant 0$ on pose $\mathrm{T}^n V = V^{\otimes n} = \underbrace{V \otimes_K \cdots \otimes_K V}_{n-\text{fois}}$ et $\mathrm{T}_K(V) = \bigoplus_{n \geqslant 1} V^{\otimes n}$. Remarquer que $\mathrm{T}^0 V = K$ et $\mathrm{T}^1 V = V$.
   (a) Montrer qu'on peut munir canoniquement $\mathrm{T}_K(V)$ d'une structure d'algèbre graduée telle que, pour deux entiers $r, s \geqslant 0$, le produit de $x_1 \otimes \cdots \otimes x_r \in V^{\otimes r}$ et $y_1 \otimes \cdots \otimes y_s \in V^{\otimes s}$ soit défini par
   $$x_1 \otimes \cdots \otimes x_r \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_s \in V^{\otimes (r+s)}.$$
   (b) Montrer que pour toute K-algèbre A on a une bijection naturelle, entre les applications K-linéaires $V \to A$ et les morphismes d'algèbres $\mathrm{T}_K(V) \to A$, donnée par l'inclusion $V \subset \mathrm{T}_K(V)$.
   (c) Donner un analogue pour les algèbres graduées de la propriété universelle précédente.
4. Soit V un K-espace vectoriel. On pose $I \subset \mathrm{T}_K(V)$ l'idéal bilatère engendré par les éléments de la forme $x \otimes y - y \otimes x$ pour $x, y \in V$. On note $\mathrm{Sym}_K V = \mathrm{T}_K(V)/I$.
   (a) Montrer que $\mathrm{T}_K(V)$ munit naturellement $\mathrm{Sym}_K(V) = \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathrm{Sym}_K^n V$ d'une structure d'algèbre graduée sur K. Montrer qu'on a $\mathrm{Sym}_K^0 V = K$ et $\mathrm{Sym}_K^1 V = V$.
   (b) Montrer que pour toute K-algèbre commutative A on a une bijection naturelle, entre les applications K-linéaires $V \to A$ et les morphismes d'algèbres $\mathrm{Sym}_K(V) \to A$, donnée par l'inclusion $V \subset \mathrm{Sym}_K(V)$. Donner un analogue gradué de cette propriété universelle.
   (c) En déduire qu'une application linéaire $V \to W$ donne canoniquement lieu à un morphisme d'algèbres graduées $\mathrm{Sym}_K V \to \mathrm{Sym}_K W$.
   (d) Soit W un K-espace vectoriel et $n \geqslant 1$ un entier. Montrer qu'on a une bijection naturelle, entre les applications n-linéaires symétriques $V^n \to W$ et les applications linéaires $\mathrm{Sym}_K^n V \to W$, donnée par le morphisme canonique $V^n \to \mathrm{Sym}_K^n V$.
   (e) On suppose que V est de dimension fini $n \geqslant 1$. Montrer que le choix d'une base de V détermine un isomorphisme de K-algèbres graduées $\mathrm{Sym}_K V \cong K[X_1, \dots, X_n]$. Déterminer la dimension de $\mathrm{Sym}_K^d V$ pour tout entier $d \geqslant 0$.
5. Soit V un K-espace vectoriel. On pose $I \subset \mathrm{T}_K(V)$ l'idéal bilatère engendré par les éléments de la forme $x \otimes x$ pour $x \in V$. On note $\bigwedge_K V = \mathrm{T}_K(V)/I$.
   (a) Montrer que $\mathrm{T}_K(V)$ munit naturellement $\bigwedge_K V = \bigoplus_{n \geqslant 0} \bigwedge_K^n V$ d'une structure d'algèbre graduée sur K. Montrer qu'on a $\bigwedge_K^0 V = K$ et $\bigwedge_K^1 V = V$.

(b) Montrer que pour toute K-algèbre A on a une bijection naturelle, entre les applications K-linéaires $f : V \to A$, tels que $f(x)^2 = 0$ pour tous $x \in V$, et les morphismes d'algèbres $\bigwedge_K V \to A$, donnée par l'inclusion $V \subset \bigwedge_K V$. Donner un analogue gradué de cette propriété universelle.

(c) En déduire qu'une application linéaire $V \to W$ donne canoniquement lieu à un morphisme d'algèbres graduées $\bigwedge_K V \to \bigwedge_K W$.

(d) Soit W un K-espace vectoriel et $n \geqslant 1$ un entier. Montrer qu'on a une bijection naturelle, entre les applications n-linéaires alternées[3] $V^n \to W$ et les applications linéaires $\bigwedge_K^n V \to W$, donnée par le morphisme canonique $V^n \to \bigwedge_K^n V$. En déduire que la famille $v_1, \ldots, v_n \in V$ est libre si et seulement s'il existe une application alternée $f \colon V^n \to K$ telle que $f(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$.

(e) On suppose que V est de dimension fini $n \geqslant 1$. Montrer à l'aide du morphisme canonique $\mathrm{T}_K(V) \to \bigwedge_K V$ que le choix d'une base de V détermine une base de $\bigwedge_K V$ qu'on explicitera. Déterminer la dimension de $\bigwedge_K^d V$ pour tout entier $d \geqslant 0$.

(f) Montrer que si $u \in \mathrm{End}_K(V)$, l'endomorphisme induit $\bigwedge_K^n u$ de $\bigwedge_K^n V \cong K$ s'identifie au déterminant.

Exercice 9. [Le plongement de Plücker]†

Soit $n \geqslant 1$ et V un K-espace vectoriel de dimension fini n. Pour $m \leqslant n$ un entier positif, on définit la *m-Grassmanienne de V*, $\mathrm{Gr}_m(V)$ comme l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension m de V. On note $\mathbb{P}(V) = \mathrm{Gr}_1(V)$, qui n'est autre que l'espace projectif associé à V. On fixe un entier positif $m \leqslant n$.

1. Montrer qu'on a une bijection canonique $\mathrm{Gr}_m(V) \cong \mathrm{Gr}_{n-m}(V^*)$.
2. Montrer qu'on a un isomorphisme canonique
$$\left(\bigwedge^m V\right)^* \cong \bigwedge^{n-m} (V).$$
3. Montrer qu'on a une application bien définie
$$\Phi_{V,m} \colon \mathrm{Gr}_m(V) \to \mathbb{P}\left(\bigwedge^m V\right),$$
donnée pour $W \subset V$, un sous-espace vectoriel de dimension m de V, par $\Phi_{V,m}(W) = (\bigwedge^m W) \subset \bigwedge^m V$. Montrer que $\Phi_{V,m}$ est injective et commute aux actions naturelles de $\mathrm{GL}(V)$, que l'on prendra le soin de définir. C'est le *plongement de Plücker*.
4. On se place dans le cas $n = 4$ et $m = 2$. On fixe e_1, e_2, e_3, e_4 une base de V et on note $x_{i,j}$ la coordonnée homogène correspondante à $e_i \wedge e_j$, pour toute paire d'indices distincts i et j, ce qui donne une bijection naturelle $\mathbb{P}(\bigwedge^m V) \cong \mathbb{P}^4(K)$. Montrer qu'alors l'image de $\Phi_{V,2}$ est précisément
$$\{x \in \mathbb{P}^4(K) \mid x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23} = 0\}.$$
Cet ensemble est appelé la *quadrique de Klein*.
5. Quelques remarques culturelles sur cette construction.
   (a) L'équation de cet ensemble est parfois appelée *relation de Ptolémée*. Elle donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un quadrilatère puisse être inscrit dans un cercle. Plus précisément soit A_1, A_2, A_3, A_4 quatre points du plan qui définissent un quadrilatère convexe, alors en notant x_{ij} la distance de A_i à A_j, pour toute paire d'indices distincts i et j, le quadrilatère peut être inscrit dans un cercle si et seulement si on a $x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23} = 0$.
   (b) Plus généralement, on peut décrire l'image de $\Phi_{V,m}$ en terme de relations polynomiales, ce qui muni $\mathrm{Gr}_m(V)$ d'une structure de *variété algébrique projective*. Vous pouvez essayer de généraliser la relation précédente de la quadrique de Klein en des relations qui décrivent $\mathrm{Gr}_2(K^n)$ de la sorte.

3. Alterné signifie que l'image d'une suite $(x_1, \ldots, x_n)$, tel qu'il existe deux indices distincts i et j tels que $x_i = x_j$, est nul. Une application n-linéaire alternée est anti-symétrique mais la réciproque n'est vrai qu'hors de la caractéristique 2... D'où cette précaution.