École Normale Supérieure, Année 2019-2020

1^{e} année, Algèbre 1

TD n° 9 : Théorie des représentations I : Généralités et caractères

---

Exercice 1. [Vrai ou Faux]

1. (a) Tout groupe admet une représentation fidèle sur tout corps.
   (b) Tout groupe fini admet une représentation fidèle de dimension finie sur tout corps.
   (c) Tout groupe admet une représentation fidèle de dimension finie sur tout corps.
   (d) Tout groupe admet une représentation fidèle de dimension finie.
2. Soit G un groupe fini et H un sous-groupe.
   (a) Si τ est une représentation complexe irréductible de H alors τ définit une représentation irréductible de G.
   (b) Si ρ est une représentation complexe irréductible de G alors ρ définit une représentation irréductible de H.
   (c) On suppose que H est distingué dans G. Soit ρ' est une représentation complexe de G/H. Alors ρ' définit une représentation irréductible de G si et seulement si ρ' est irréductible.

Exercice 2.

Soit G un groupe. Déterminer les représentations complexes (V, ρ) telles qu'il existe $v \in V$ tel que la famille des $\rho(g) \cdot v$ pour $g \in G$ forment une base de V.

Exercice 3.

Soit p un nombre premier et soit G un p-groupe.

1. Soit K un corps de caractéristique différente de p. Montrer que G admet une représentation non-triviale de dimension 1 sur K.
2. Soit K un corps de caractéristique p. Montrer que toute représentation irréductible de G sur K est triviale.

Exercice 4. [Hilbert 90]

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Soient $F \subset E$ des corps tels que E est un F-espace vectoriel de dimension n. On suppose l'existence d'un groupe [1] G de cardinal n, composé des automorphismes F-linéaires de E, tel que le corps $E^G = \{e \in E \mid g(e) = e,\ \forall g \in G\}$ soit égal à F.

1. Donner un exemple d'une telle situation dans le cas où F est de caractéristique p et dans le cas où F est de caractéristique 0.
2. Montrer que les éléments de G sont linéairement indépendants. (C'est le théorème d'indépendance de Dirichlet.)
3. Soit (V, ρ) une représentation de G sur un F-espace vectoriel V de dimension fini. On suppose de plus V muni d'une structure de E-espace vectoriel [2]. Montrer que en tant que représentations de G, $V \cong E^n$ pour $n \geqslant 1$.

Exercice 5.

Soit G un groupe, (V, ρ) une représentation de G de dimension fini sur un corps K. Expliciter les caractères de $\bigwedge_K^2 V$ et $\mathrm{Sym}_K^2 V$ en terme du caractère de V.

---

1. On dit dans ce cas que l'extension de corps E/F est *galoisienne* et on appelle G son *groupe de Galois*.
2. Remarquer que E muni de l'action de G est une F-représentation de G

Exercice 6. [Réduction d'endomorphismes et théorie des représentations]

Soit K un corps que l'on suppose algébriquement clos.

1. Soit G un groupe commutatif. Déterminer les représentations irréductibles de G. En déduire si G est fini, toutes les représentations de dimension fini de G. Que se passe-t-il si K n'est plus algébriquement clos ?
2. On considère le groupe $\mathbb{Z}$ et on s'intéresse à déterminer ses représentations de dimension finie.
   (a) Montrer que se donner une représentation (V, ρ) de $\mathbb{Z}$ est équivalent à se donner un espace vectoriel V muni d'un endomorphisme $u_\rho \colon V \to V$. Déterminer le caractère de V en terme de valeurs propres de u_ρ.
   (b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur u pour que (V, ρ) soit somme de représentations de dimension 1.
   (c) Classifier les représentations de dimension finie de $\mathbb{Z}$ sur K. Que se passe-t'il si K n'est plus algébriquement clos ?
3. On considère le groupe $\mathbb{Z}^n$ avec $n \geqslant 1$ un entier.
   (a) Montrer que n endomorphismes commutant 2 à 2 son trigonalisables dans une même base. Que se passe-t'il si K n'est plus algébriquement clos ?
   (b) Classifier les représentations de dimension finie de $\mathbb{Z}^n$ sur K. Que se passe-t'il si K n'est plus algébriquement clos ?

Exercice 7. [Représentations réelles vs complexes I]

Soit K un corps. On appelle *algèbre à division* sur K une K-algèbre telle que tout élément non-nul est inversible. Par exemple une algèbre à division sur K commutative n'est rien de plus qu'un corps contenant K, les quaternions $\mathbb{H}$ forment une algèbre à division sur $\mathbb{R}$ non-commutative.

1. Soit G un groupe et (V, ρ) une représentation irréductible de G de dimension fini sur K. Montrer que $\mathrm{End}_K(V, \rho)$ est une algèbre à division sur K.
2. Déterminer une représentation irréductible (V, ρ) sur $\mathbb{R}$ du groupe des quaternions Q_8, d'ordre 8. telle que $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V, \rho) = \mathbb{H}$.
   (a) Est-ce que la représentation $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ est irréductible ?
   (b) Déterminer le caractère de cette représentation.
   (c) Montrer qu'il existe sur V une forme bilinéaire invariante sous l'action de Q_8 ? Que peut-on dire de cette forme bilinéaire ?
3. Le but est maintenant de généraliser les observations précédentes. Soit G un groupe fini et (V, ρ) une représentation irréductible de G de dimension finie $n \geqslant 1$ sur $\mathbb{C}$; on note χ son caractère.
   (a) Montrer que χ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ si et seulement s'il existe sur V une forme bilinéaire non dégénérée invariante sous l'action de G et montrer qu'elle est unique à homothétie près. Si ce n'est pas le cas on dit que la représentation est *complexe*.
   (b) Montrer que cette forme bilinéaire est symétrique si et seulement s'il existe $V_0 \subset V$ une sous-représentation irréductible sur $\mathbb{R}$ telle que $V = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ si et seulement si $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V_0, \rho) = \mathbb{R}$. On dit dans ce cas que la représentation est *réelle*.
   (c) Montrer que cette forme bilinéaire est alternée si et seulement $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V, \rho) \cong \mathbb{H}$. On dit alors que cette représentation est *quaternionique*.