1$^{\text{e}}$ année, Algèbre 1

TD n$^{\text{o}}$ 1 : Ensembles, relations et cardinalité

`Exercices corrigés: 1 - 2 - 3 - 5 - 6 - 13 - 14`

1 Relations

Exercice 1. Échauffement

1. Soit E un ensemble. Décrire le quotient de E par la relation d'équivalence "égalité". Décrire le quotient de E par la relation d'équivalence $E \times E$.

2. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Montrer que la relation de congruence modulo n est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$ puis décrire le quotient de $\mathbb{Z}$ par cette relation.

3. Soit $\mathscr{V}_k$ "l'ensemble" des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps k. Soit R la relation d'isomorphisme de k-espaces vectoriels. Montrer que c'est une relation d'équivalence puis décrire le quotient $\mathscr{V}_k/\mathrm{R}$.

4. Soit X un ensemble fixé et R une relation d'équivalence sur X. À tout ensemble B on associe l'ensemble

$$\mathscr{C}_{\mathrm{R}}(X;B) \coloneqq \{f\colon X \to B \mid \forall x,y \in X,\, x\mathrm{R}y \implies f(x)=f(y)\} \subset \mathscr{C}(X,B)$$

où $\mathscr{C}(X,B)$ est l'ensemble des applications de X dans B. Montrer que l'application quotient $\pi\colon X \to X/\mathrm{R}$ définit, pour tout ensemble B, une bijection

$$\mathscr{C}(X/\mathrm{R};B) \xrightarrow[f\longmapsto f\circ\pi]{\sim} \mathscr{C}_{\mathrm{R}}(X;B),$$

puis expliciter, le plus formellement possible, dans quelle mesure le couple $(X/\mathrm{R},\pi)$ est déterminé par cette propriété.

Remarque 1.1. La formulation de la dernière question est inutilement compliquée dans le cadre de la théorie des ensembles. Ce point de vue est pourtant extrêmement puissant lorsqu'on travaille dans le bon contexte. C'est *la théorie des catégories* qui permet de transformer ces raisonnements en des énoncés très généraux. Pour faire un point de vocabulaire, on travaille ici dans *la catégorie des ensembles*, on appelle l'association $B \rightsquigarrow \mathscr{C}_{\mathrm{R}}(X;B)$ un *foncteur* et on dit qu'il est *représentable* puisqu'il est de la forme $B \rightsquigarrow \mathscr{C}(X/\mathrm{R};B)$ au travers d'une *transformation naturelle* qui est décrite par π. L'énoncé du 4. précédent décrit une *propriété universelle* du couple $(X/\mathrm{R},\pi)$ qui résout un *problème universel.* Dans le TD, on dira parfois qu'une application π est *naturelle* ce qui fera implicitement référence à ce point de vue si on veut donner un sens à la qualité d'être naturel.

Exercice 2.

Soit E un ensemble et R une relation sur E.

1. Montrer qu'il existe une unique relation d'équivalence $\tilde{\mathrm{R}}$ contenant R et minimale pour l'inclusion. On pose $E/\mathrm{R} \coloneqq E/\tilde{\mathrm{R}}$.

2. Donner une description explicite de $\tilde{\mathrm{R}}$. En particulier, on décrira l'application $E \to E/\mathrm{R}$.

3. On munit $\mathbb{Z}$ de la relation R définie par : $x\mathrm{R}y \iff \exists p$ un nombre premier tel que $x = py$. Expliciter la surjection $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/\mathrm{R}$.

4. Soit X un ensemble et $f\colon X \to X$ une bijection. Pour R définie par $x\mathrm{R}y \iff y = f(x)$, expliciter la surjection $X \to X/\mathrm{R}$.

Exercice 3. Somme de deux carrés (cf. Exemple 1.7)

Cet exercice porte sur la fameuse démonstration de Zagier du théorème suivant :

Théorème 1.2. *Soit p un nombre premier impair. Alors p est la somme de deux carrés d'entiers si et seulement si $p \equiv 1 \mod 4$.*

Fixons p un nombre premier impair.

1. Montrer que si p est la somme de deux carrés d'entiers, alors $p \equiv 1 \mod 4$.
2. Supposons p congru à 1 modulo 4 et montrons qu'alors il est somme de deux carrés d'entiers. Notons

$$\mathrm{X} = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 : x^2 + 4yz = p\},$$

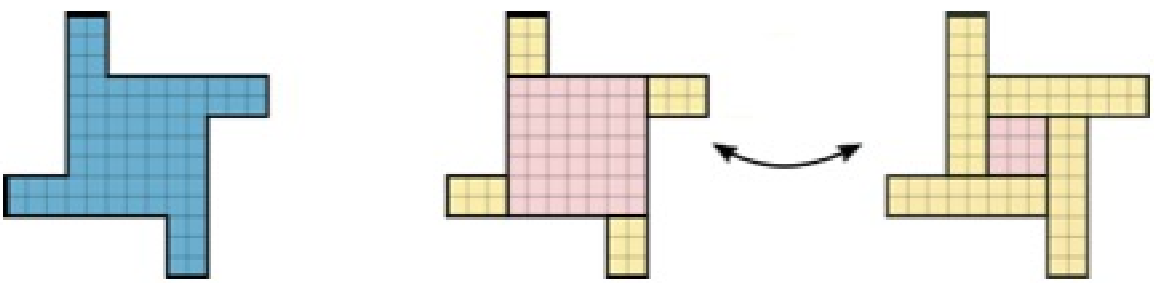
puis l'application $i \colon \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ donnée par les formules suivantes

$$i : (x, y, z) \longmapsto \begin{array}{l} (x + 2z, z, y - x - z) \text{ si } x < y - z\,, \\ (2y - x, y, x - y + z) \text{ si } y - z < x < 2y\,, \\ (x - 2y, x - y + z, y) \text{ si } x > 2y\,. \end{array}$$

   (a) Montrer que i définit bien une involution. Que peut-on en déduire sur la parité de $|\mathrm{X}|$?

   (b) Conclure. On pourra utiliser l'application $j \colon \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ donnée par la formule $j(x, y, z) = (x, z, y)$.

3. *Détailler* une preuve géométrique du théorème 1.2 en prenant soin de distinguer trois cas.



2 Cardinalité

Les exercices qui suivent traitent de la notion de cardinalité mais sans explicitement y faire appel. Ce ne sont que des retranscriptions des exercices du cours. Pour le confort, on donne quelques définitions et notations

- *Deux ensembles ordonnés X et Y sont dits* isomorphes *s'il existe une bijection $f : X \to Y$ telle que*

$$\forall x, y \in X,\ x \leqslant y \iff f(x) \leqslant f(y).$$

- *Soit A et B deux ensembles. On notera $A \hookrightarrow B$ la proposition* "il existe une injection de A dans B", $A \twoheadrightarrow B$ *pour* "il existe une surjection de A sur B" *et finalement $A \sim B$ pour* "il existe une bijection entre A et B".
- *On dira que deux ensembles A et B sont* équipotents *si $A \sim B$. Il est clair que c'est une relation d'équivalence et on parlera de la* classe d'équipotence *d'un ensemble.*
- *On dira qu'un ensemble A est* dénombrable[1] *si $\mathbb{N} \twoheadrightarrow A$ ou de manière équivalente si $A \hookrightarrow \mathbb{N}$.*

[1] On utilise ici la convention anglophone où un ensemble fini est dénombrable. En français, un ensemble est dit dénombrable lorsqu'il est équipotent à $\mathbb{N}$ et on parlerait plutôt de *au plus dénombrable* pour notre définition.

Exercice 4.

Pour cet exercice, on ne supposera a priori pas la validité l'axiome du choix.

1. Construire une fonction de choix sur $\mathbb{Q}$, puis sur $\mathbb{Q}^2$.
2. Soit $\mathscr{U} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R}^2)$ une famille de parties de $\mathbb{R}^2$. Pour $\mathscr{U}$ fixé, on se pose le problème de construire une fonction qui à tout $U \in \mathscr{U}$ associe un élément de U. En discuter dans les cas où $\mathscr{U}$ est donnée par :
   - les ouverts de $\mathbb{R}^2$,
   - les fermés de $\mathbb{R}^2$,
   - les parties dénombrables[2] de $\mathbb{R}^2$.

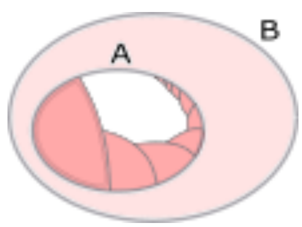
Exercice 5. Théorème de Cantor-Schröder-Bernstein

On veut montrer que si A et B sont deux ensembles tels que $A \hookrightarrow B$ et $B \hookrightarrow A$, alors $A \sim B$

1. Montrer que l'on peut supposer $A \subset B$ et qu'il existe une injection $i \colon B \to A$.
2. Montrer que les ensembles $i^n(B \setminus A)$, pour $n \geqslant 1$, sont deux-à-deux disjoints.
3. Posons l'application $j \colon A \to B$, définie pour $x \in A$ par

$$j(x) \coloneqq \begin{cases} i^{-1}(x) & \text{si } \exists n \geqslant 1,\ x \in i^n(B \setminus A), \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Montrer que j définit bien une bijection. (*la fonction j "monte l'escalier" comme sur la figure ci-dessous*)



Exercice 6.

1. Soit $f \colon X \to Y$ une application entre deux ensembles. Une *retraction* de f (ou *inverse à gauche*) est une application $r : Y \to X$ vérifiant $r \circ f = \mathrm{id}_X$. Montrer que f admet une retraction si, et seulement si, f est injective.
2. Soit A et B deux ensembles. Montrer[3] $A \hookrightarrow B \iff B \twoheadrightarrow A$.

Exercice 7. Préservation de la dénombrabilité

1. Montrer que si A est infini et dénombrable alors on a $A \sim \mathbb{N}$.
2. Montrer que si on a $A \twoheadrightarrow B$ avec A dénombrable, alors B est dénombrable.
3. Montrer que si A et B sont dénombrables, alors $A \times B$ est dénombrable.
4. Soit A un ensemble et soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille dénombrable de parties dénombrables de A. Montrer $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est dénombrable.

[2] On admettra ici que l'axiome du choix est nécessaire pour construire un sous-ensemble non Lebesgue-mesurable de $\mathbb{R}$ (Solovay), et on considèrera la relation d'équivalence sur R définie par $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$.

[3] Vous remarquerez que votre démonstration utilise l'axiome du choix, contrairement à celle du point précédent ou du théorème de Cantor-Schröder-Bernstein.

Exercice 8.

1. Montrer que $[0,1]$ et $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ sont dans la même classe d'équipotence que $\mathbb{R}$.
2. Rappeler pourquoi la classe d'équipotence de $\mathbb{R}$ ne contient pas $\mathbb{N}$ i.e. $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. [4]
3. Montrer que $\{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ et $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ sont aussi dans la classe d'équipotence de $\mathbb{R}$.

Exercice 9.

Soit A et B deux ensembles, montrer qu'alors $A \hookrightarrow B$ ou $B \hookrightarrow A$. On pourra considérer les couples (I, f) avec $I \subset A$ et $f : I \to B$ une injection.

Exercice 10.

Soit A un ensemble infini. Le but de l'exercice est de montrer que $A \sim A \times \{1, \dots, n\}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ puis d'en déduire $A \sim A \times \mathbb{N}$.

1. Montrer que A admet une partition en sous-ensembles infinis dénombrables. On utilisera le lemme de Zorn.
2. En déduire qu'il existe un ensemble B tel que $A \sim B \times \mathbb{N}$, puis conclure.

Exercice 11.

Soit X un ensemble infini. On veut montrer $X \sim X \times X$.

1. On suppose que $f : X \times X \to X$ est une bijection. On considère $Y = X \coprod X'$ où X' est un ensemble en bijection avec X. Montrer qu'il existe une bijection $g : Y \times Y \to Y$ dont la restriction à $X \times X$ coïncide avec f.
2. On suppose $X = A \cup B$. Montrer que $X \sim A$ ou $X \sim B$.
3. Conclure en appliquant le lemme de Zorn à l'ensemble convenablement ordonné des couples (A, f) avec $A \subset X$ et f une bijection $A \times A \to A$.

Exercice 12.

Pour X un ensemble infini, montrer $X \sim \mathscr{P}_{\text{fin}}(X)$ où $\mathscr{P}_{\text{fin}}(X)$ est l'ensemble des parties finies de X.

3 Espaces vectoriels

Les exercices suivants traitent des espaces vectoriels de dimension quelconque et plus particulièrement de propriétés relatives au cardinal de leur base.

Exercice 13.

Soient V un espace vectoriel, $e = \{e_i\}_{i\in I}$ une famille génératrice de V, et $f = \{f_j\}_{j\in J}$ une base de V.

1. Pour $i \in I$, on écrit $e_i = \sum_{j\in J} x_j f_j$ et on pose $J_i = \{j \in J, x_j \neq 0\}$, qui est un ensemble fini. Montrer $J = \bigcup_{i\in I} J_i$.
2. En déduire $I \times \mathbb{N} \twoheadrightarrow J$, puis $J \hookrightarrow I$.
3. En déduire que si e et f sont des bases de V alors $I \sim J$.

Exercice 14.

Soient V un k-espace vectoriel et $e = \{e_i\}_{i\in I}$ une base de V. On suppose I infini.

1. Montrer $V \sim k \times I$.
2. En déduire que l'on a $V \sim I$ ou $V \sim k$.

[4] *Indication* : l'argument diagonal de Cantor : si $(\varepsilon_{m,n})_{m,n} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, considérer $(1-\varepsilon_{n,n})_n \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$