École Normale Supérieure, Année 2021-2022

1e année, Algèbre 1

TD n° 12 : Représentations complexes des groupes

`À faire en priorité : 1 - 2 - 3 - 6`

Exercice 1. [Représentations polynomiales complexes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$]

Soit $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, on munit $V = \mathbb{C}^2$ de sa base canonique $\{e_1, e_2\}$ et on note $\{x_1, x_2\}$ la base duale. On considère la représentation $\mathrm{Sym}_{\mathbb{C}} V := \mathbb{C}[x_1, x_2]$ de G sur les fonctions polynomiales sur V donnée pour $P \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$ par $g \cdot P = P \circ g^{-1}$. On notera $\mathbb{C}(k_1, k_2)$ la représentation complexe de dimension 1 de $(\mathbb{C}^\times)^2$ donnée par le caractère $\chi_{k_1,k_2} : (\lambda_1, \lambda_2) \mapsto \lambda_1^{-k_1} \lambda_2^{-k_2}$

1. Justifier brièvement que $\mathrm{Sym}_{\mathbb{C}} V$ est une représentation. Montrer que $\mathrm{Sym}_{\mathbb{C}} V$ se décompose suivant l'action du centre $\mathbb{C}^\times \subset G$ en sous-espaces G-stables
$$\mathrm{Sym}_{\mathbb{C}} V = \bigoplus_{d \geqslant 0} \mathrm{Sym}^d_{\mathbb{C}} V$$
où $\mathrm{Sym}^d_{\mathbb{C}} V$ est de dimension $d + 1$.
2. Rappeler, sous forme d'un isomorphisme $\mathrm{T}_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \rtimes (\mathbb{C}^\times)^2$, la décomposition des matrices triangulaires supérieures $\mathrm{T}_2(\mathbb{C})$ en les matrices diagonales et unipotentes supérieures.
3. Montrer qu'on a une décomposition suivant l'action des matrices diagonales
$$\mathrm{Sym}_{\mathbb{C}} V = \bigoplus_{(k_1,k_2) \in \mathbb{N}^2} \mathbb{C}(k_1, k_2).$$
puis montrer que pour un sous-espace stable par $\mathrm{T}_2(k)$, s'il contient $\mathbb{C}(k_1, k_2)$ alors il contient $\mathbb{C}(m, k_1 + k_2 - m)$ pour tout entier m tel que $0 \leqslant m \leqslant k_1$.
4. Montrer la décomposition $G = \mathrm{T}_2(\mathbb{C}) \sqcup \mathrm{U}_2(\mathbb{C}) w \mathrm{T}_2(\mathbb{C})$ pour w la matrice donnée par
$$w = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
Déterminé l'action de w sur la décomposition de la question précédente.
5. Montrer que les représentations $\mathrm{Sym}^d_{\mathbb{C}} V$ pour tout $d \geqslant 0$ sont irréductibles et deux-à-deux non isomorphes.

Exercice 2.

Soit G un groupe fini et (V, ρ) une représentation complexe.

1. Montrer qu'il existe sur V un produit bilinéaire hermitien non-dégénéré $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ et invariant par ρ au sens où $\forall v, w \in V,\ g \in G,\ \langle \rho(g) \cdot v \mid \rho(g) \cdot w \rangle = \langle v \mid w \rangle$. On dit dans ce cas que la représentation est *unitaire*.
2. En déduire que toute sous-représentation de V admet supplémentaire G-invariant.
3. Redémontrer le théorème de Maschke.

Exercice 3. [Vrai ou Faux]

1. (a) Tout groupe admet une représentation fidèle à coefficient dans tout corps.
   (b) Tout groupe fini admet une représentation fidèle de dimension finie à coefficient dans tout corps.
   (c) Tout groupe admet une représentation fidèle de dimension finie sur tout corps.
   (d) Tout groupe admet une représentation fidèle de dimension finie.
2. Soit G un groupe fini et H un sous-groupe.
   (a) Si τ est une représentation complexe irréductible de H alors τ définit une représentation irréductible de G.
   (b) Si ρ est une représentation complexe irréductible de G alors ρ définit une représentation irréductible de H.
   (c) On suppose que H est distingué dans G. Soit ρ' est une représentation complexe de G/H. Alors ρ' définit une représentation irréductible de G si et seulement si ρ' est irréductible.

Exercice 4.

Soit G un groupe fini et ψ, ϕ des caractères complexes de G.

1. Montrer que si ψ est de degré 1, alors $\psi\phi$ est irréductible si et seulement si ϕ l'est.
2. Montrer que si ψ est de degré strictement supérieur à 1, alors $\psi\bar{\psi}$ n'est pas irréductible.
3. On suppose que ϕ est un caractère irréductible de G et que c'est le seul caractère irréductible de G de degré $\phi(1)$. Montrer que si ψ est un caractère irréductible de degré 1 de G tel que pour $g \in G$, $\psi(g) \neq 1$, alors $\phi(g) = 0$.

Exercice 5. [Représentations projectives]

Soit G un groupe et (V, ρ) une représentation complexe de dimension finie de G

1. Soit W une sous-représentation de V, non nulle et distincte de V.
   (a) Donner un exemple pour lequel W n'admet pas de supplémentaire G-stable.
   (b) Le théorème de Maschke, vu en cours, affirme que W admet un supplémentaire G-stable dès lors que G est fini. Montrer que c'est encore le cas si on suppose seulement que $\rho(G)$ est fini.
   (c) On suppose à présent que l'image de $\rho(G) \subset \mathrm{PGL}(V)$ est finie. Montrer que W admet un supplémentaire G-stable, puis que V est une somme directe de représentations irréductibles de G.
2. Soit Z un sous-groupe contenu dans le centre de G
   (a) Si V est irréductible, démontrer que Z agit sur V par homothéties, i.e. $\rho(Z)$ est contenu dans le centre de $\mathrm{GL}(V)$.
   (b) Si Z agit sur V par homothéties, et si Z est d'indice fini dans G, démontrer que V est une somme directe de représentations irréductibles de G (on pourra utiliser la question 1.(a)).
3. Une *représentation projective complexe* d'un groupe G est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel U muni d'un morphisme $\rho\colon G \to \mathrm{PGL}(U)$. On a encore dans ce cadre des notions de sous-espace G-stable, d'indécomposable, d'irréductible (mais pas de somme directe). Supposons maintenant que (V, ρ) est une représentation projective complexe de G.
   (a) Montrer qu'il existe un groupe H et un morphisme de groupes surjectif $\pi : H \to G$ tel que $\mathrm{Ker}\,\pi$ est dans le centre de H, et un morphisme $\rho' : G \to \mathrm{GL}(V)$, tel que $\rho \circ \pi$ soit la composition de ρ' avec la projection $\mathrm{GL}(V) \to \mathrm{PGL}(V)$. Autrement dit, toute représentation projective complexe d'un groupe se relève en une représentation complexe d'une extension centrale.
   (b) En déduire que toute représentation projective définie une classe dans $H^2(G\,;\mathbb{C}^\times)$ telle que (V, ρ) se relève en une représentation complexe de l'extension centrale de G définie par cette classe.
   (c) On suppose que G est fini. Démontrer que tout sous-espace G-stable de V admet un supplémentaire G-stable (on pourra utiliser la question 2.(b)), puis que V est une somme directe de sous-espaces G-stables irréductibles.
4. Supposons maintenant que G est contenu dans une suite exacte
$$1 \to A \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} B \to 1,$$
   où A est un groupe fini. Soit (V, ρ) une représentation complexe de dimension finie de G. Puisque A est fini, on peut décomposer V, vue comme représentation de I, en composantes isotypiques:
$$V = \bigoplus_{\chi \in X} V[\chi],$$
   où X est un ensemble de classes d'isomorphismes de représentations irréductibles de A, et $V[\chi] \neq 0$ est la composante χ-isotypique de V.
   (a) Montrer que pour tout g dans G et tout $\chi \in X$, l'automorphisme $\rho(g)$ envoie $V[\chi]$ sur $V[g(\chi)]$, où $g(\chi)$ est un élément de X que l'on précisera.
   (b) Montrer que $(g, \chi) \mapsto g(\chi)$ fournit une action à gauche de G sur X. Démontrer que cette action se factorise par le morphisme surjectif $\pi : G \to B$.
   (c) Si V est irréductible, démontrer que cette action de B sur X est transitive. En particulier, on obtiendra $X \neq \emptyset$.
   (d) On suppose que V est irréductible comme représentation de A. Montrer que l'image de $\rho(G) \subset \mathrm{PGL}(V)$ est un sous-groupe fini. Donner un exemple où $\rho(G)$ est infini.

Exercice 6. [Représentations réelles vs complexes I]

Soit K un corps.

1. Soit G un groupe et (V, ρ) une représentation irréductible de G de dimension finie sur K. Montrer que $\mathrm{End}_K(V, \rho)$ est une algèbre à division sur K.

2. Déterminer une représentation irréductible (V, ρ) sur $\mathbb{R}$ du groupe des quaternions H_8 et telle que $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V, \rho) = \mathbb{H}$.

   (a) Est-ce que la représentation $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ est irréductible ?

   (b) Déterminer le caractère de cette représentation.

   (c) Montrer qu'il existe sur V une forme bilinéaire alternée invariante sous l'action de H_8.

3. Le but est maintenant de généraliser les observations précédentes. Soit G un groupe fini et (V, ρ) une représentation irréductible de G de dimension finie $n \geqslant 1$ sur $\mathbb{C}$; on note χ son caractère.

   (a) Montrer que χ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ si et seulement s'il existe sur V une forme bilinéaire non dégénérée invariante sous l'action de G et montrer qu'elle est unique à homothétie près. Si ce n'est pas le cas on dit que la représentation est *complexe*.

   (b) Montrer que cette forme bilinéaire est symétrique si et seulement s'il existe $V_0 \subset V$ une sous-représentation irréductible sur $\mathbb{R}$ telle que $V = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ si et seulement si $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V_0, \rho) = \mathbb{R}$. On dit dans ce cas que la représentation est *réelle*.

   (c) Montrer que cette forme bilinéaire est alternée si et seulement $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V, \rho) \cong \mathbb{H}$. On dit alors que cette représentation est *quaternionique*.

Exercice 7. [Théorie de Fourier sur les groupes finis]

Soit G un groupe fini, on note $\mathbb{C}[G]$ l'algèbre de groupe de G. On note $(W_1, \rho_1), \dots (W_k, \rho_k)$ les représentations complexes irréductibles de dimension finie de G.

1. Montrer qu'on a un isomorphisme naturel de $\mathbb{C}$-algèbres

$$\rho = (\tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_k) \colon \mathbb{C}[G] \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{k} \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W_i).$$

2. Montrer que pour $(u_1, \dots, u_k) \in \prod_{i=1}^{k} \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W_i)$, l'élément $u = \sum_{g \in G} a_g e_g \in \mathbb{C}[G]$ correspondant par l'isomorphisme précédent est donné par

$$a_g = \frac{1}{\mathrm{Card}(G)} \sum_{i=1}^{k} \dim_{\mathbb{C}}(W_i) \, \mathrm{Tr}_{W_i}(\rho_i(g^{-1}) u_i).$$

3. Pour $u = \sum_{g \in G} a_g e_g$ et $v = \sum_{g \in G} b_g e_g$ des éléments de $\mathbb{C}[G]$, on pose $\langle u, v \rangle = \mathrm{Card}(G) \sum_{g \in G} a_{g^{-1}} b_g$. En déduire la *formule de Plancherel* :

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{k} \dim_{\mathbb{C}}(W_i) \, \mathrm{Tr}_{W_i}(\tilde{\rho}_i(uv))$$

4. Montrer qu'on a un isomorphisme naturel de $\mathbb{C}$-algèbres

$$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_k) \colon Z(\mathbb{C}[G]) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^k.$$

   En déduire que si $u = \sum_{g \in G} a_g e_g \in Z(\mathbb{C}[G])$, alors

$$\omega_i(u) = \frac{1}{\dim_{\mathbb{C}}(W_i)} \sum_{g \in G} a_g \chi_i(g),$$

   où χ_i est le caractère de ρ_i. En déduire une base de $Z(\mathbb{C}[G])$ d'idempotents orthogonaux[1], puis que tout morphisme de $\mathbb{C}$-algèbre $Z(\mathbb{C}[G]) \to \mathbb{C}$ est nécessairement l'un des ω_i.

[1] C'est à dire que $p_i p_j = \delta_{i,j}$ et $p_1 + \cdots + p_k = 1$.

Exercice 8. [Séries de Fourier et représentations]

Soit $G = \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \{r(\theta)\,;\,\theta \in [0, 2\pi[\}$ où l'on note

$$r(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Le but est d'étudier l'espace $\mathrm{L}^2(G) = \left\{ f \colon G \to \mathbb{C} \mid \int_0^{2\pi} |f(r(\theta))|^2 d\theta < \infty \right\}$ des fonctions complexes de carré intégrable sur G à valeur dans $\mathbb{C}$.

1. Montrer que toute représentation complexe irréductible de G est de la forme $\mathbb{C}(k) = (\mathbb{C}, \chi_k)$ où $\chi_k \colon G \to \mathbb{C}^\times$ est donné par $\chi_k(\theta) = \exp(2i\pi k\theta)$, pour $k \in \mathbb{Z}$. Montrer $k \neq k' \iff \mathbb{C}(k) \perp \mathbb{C}(k')$
2. Montrer que tout sous-espace fermé de $\mathrm{L}^2(G)$ stable par G, admet un supplémentaire fermé et stable par G.
3. Soit $\mathrm{L}^{\mathrm{fin}}(G) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}(n) \subset \mathrm{L}^2(G)$ le sous espace engendré par les sous-représentations irréductibles de G. Justifier que $\mathrm{L}^{\mathrm{fin}}(G)$ n'a pas de supplémentaire G-stable et fermé. En déduire que $\mathrm{L}^{\mathrm{fin}}(G)$ est dense dans $\mathrm{L}^2(G)$.
4. En déduire qu' on a un isomorphisme de représentations de G

$$\mathrm{L}^2(G) \xrightarrow{\sim} \widehat{\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}} \mathbb{C}(n)$$

5. Conclure que pour toute fonction $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que $f(x+1) = f(x)$ et telle que $x \mapsto |f(x)|^2$ est intégrable sur un interval d'intérieur non vide, il existe une famille sommable $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}$ telle que

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \exp(2i\pi kx),$$

   où la convergence de la somme est uniforme sur tout compact. De plus, On en déduit la formule de Plancherel

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2,$$