Algèbre 1, TD n° 13 :

Représentations complexes des groupes finis

Arnaud Vanhaecke[0]

Dernière mise à jour : January 13, 2022

Dans cette feuille, sauf mention contraire, représentation = représentation complexe et caractère = caractère central complexe. `À faire en priorité : (1) - (2) - 3 - 4 - 5 - 6 - 7`

Exercice 0. [Version condensé du TD]

1. Donner la table des caractères de H_8, D_n, S_3, S_4, A_4, $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5)$, S_5, A_5, $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$, $\mathrm{U}_3(\mathbb{F}_q)$, $\mathrm{Aff}(\mathbb{F}_q)$, .
2. Pour chacun de ces groupes, décomposer la représentation régulière et déterminer l'anneau de groupe en explicitant la transformée de Fourier. Puis, pour chaque caractère irréductible, décrire matriciellement une représentation irréductible associée.
3. Reprendre la question précédente mais cette fois, à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Exercice 1. ["Boite à outils"]

Soit G un groupe fini.

1. Soit ψ, ϕ des caractères complexes de G.
   (a) Montrer que si ψ est de degré 1, alors $\psi\phi$ est irréductible si et seulement si ϕ l'est.
   (b) Montrer que si ψ est de degré strictement supérieur à 1, alors $\psi\bar{\psi}$ n'est pas irréductible.
   (c) On suppose que ϕ est un caractère irréductible de G et que c'est le seul caractère irréductible de G de degré $\phi(1)$. Montrer que si ψ est un caractère irréductible de degré 1 de G tel que pour $g \in G$, $\psi(g) \neq 1$, alors $\phi(g) = 0$.
   (d) Soit ϕ un caractère irréductible de G de degré strictement supérieur à 1. Montrer que ϕ s'annule sur une classe de conjugaison de G.
2. On rappelle que l'on note $\mathrm{D}(G)$ le sous-groupe dérivé et $G^{\mathrm{ab}} = G/\mathrm{D}(G)$.
   (a) Montrer que toute représentation de G est de degrée 1 si et seulement si G est abélien.
   (b) Montrer que l'on a une bijection naturelle
   $$\mathrm{Hom}(G^{\mathrm{ab}}, \mathbb{C}^\times) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times),$$
   qui identifie les caractères de degrée 1 de G et les représentations irréductibles de l'abélianisé G^{ab}.
   (c) Soit $\chi_1, \ldots, \chi_m$ l'ensemble des caractères de degrés 1 de G, montrer
   $$\mathrm{D}(G) = \bigcap_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}\, \chi_i.$$
3. Soit G_1 et G_2 deux groupes finis. Déterminer les représentations irréductibles de dimension finie de $G_1 \times G_2$ en terme de celles de G_1 et G_2.

[0] *Page et contacts* : `http://www.math.ens.fr/~vanhaecke/tdalg2021/`, (tout commentaire est bienvenu.)

Exercice 2. [Représentation de permutation $\mathbb{C}X$]

Soit G un groupe fini et X un ensemble fini muni d'une action de G. On considère $\mathbb{C}X$, la *représentation de permutation* de G, de $\mathbb{C}$-espace vectoriel sous-jacent donné par $\mathbb{C}^X = \bigoplus_{x\in X} \mathbb{C}\delta_x$ muni de sa base canonique et l'action est décrite pour $g \in G$ par $g \cdot \delta_x = \delta_{g^{-1}\cdot x}$. On supposera que G opère transitivement sur X et on notera χ le caractère de $\mathbb{C}X$.

1. Montrer que $\chi = 1 + \theta$ où θ est le caractère d'une représentation de G ne contenant pas la représentation triviale.
2. Montrer que le caractère de $\mathbb{C}X^2$, pour l'action diagonale de G est χ^2.
3. Montrer l'équivalence entre les trois propriétés suivantes
   (i) L'action de G sur X est 2-transitive.
   (ii) On a $\langle \chi^2, 1\rangle = 2$.
   (iii) La représentation θ est irréductible.

Exercice 3. [Quaternion et groupes diédraux]

1. On s'intéresse aux groupes non-abéliens d'ordre 8.
2. (a) Calculer la table des caractères de H_8 puis, expliciter une représentation irréductible dont le caractère est de degré > 1.
   (b) En faire de même pour D_8. En déduire un isomorphisme (non-canonique) $\mathbb{C}[\mathrm{H}_8] \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[\mathrm{D}_8]$.
   (c) Pour un caractère χ de $G = \mathrm{D}_8, \mathrm{H}_8$, considérer
   $$\sum_{g\in G} \chi(g^2).$$
   En déduire que $\mathbb{R}[\mathrm{H}_8]$ et $\mathbb{R}[\mathrm{D}_8]$ ne sont pas isomorphes.
3. On veut maintenant décrire la table des caractères de D_{2n}. Les représentations dépendent de la parité de n et on traitera chaque cas indépendamment. On commencera par se souvenir du centre et du groupe dérivé du groupe diédral.
   (a) Déterminer les classes conjugaison ets les caractères de degrés 1 de D_{2n}.
   (b) Montrer que toute représentation irréductible qui n'est pas un caractère est de dimension 2.
   (c) Pour une représentation irréductible de D_n, considérer sa restriction au sous-groupe cyclique d'ordre n.
   (d) Compléter la table des caractères et donner explicitement des représentations irréductibles de dimension 2 correspondants aux caractères de degré 2.

Exercice 4. [Le cube, l'octaèdre, S_4 et A_4.]

On veut déterminer les représentations irréductibles de S_4 et A_4. On expliquera comment elles apparaissent dans les symétries du cube et de l'octaèdre.

1. Rappeler qu'on a $\mathrm{S}_4 \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathrm{S}_3$ et $\mathrm{A}_4 \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ puis que $\mathrm{D}(\mathrm{A}_4) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.
2. Déterminer la table des caractères de A_4. Expliciter une représentation irréductible de dimension > 1.
3. Déterminer la table des caractères de S_4. Expliciter trois représentations irréductibles de dimensions > 1 et deux à deux non isomorphes.
4. Décomposer en représentations irréductibles la restriction à A_4 de la représentation régulière de S_4.

Exercice 5. [L'icosaèdre, le dodécaèdre, A_5 et S_5]

On veut déterminer les tables de caractères de S_5 et A_5. On expliquera comment elles apparaissent dans les symétries de l'icosaèdre et du dodécaèdre.

1. Justifier que A_5 n'a pas de représentation non triviale de degré 1.
2. Expliciter des représentations irréductibles de dimension 3, 4 et 5. Justifier que A_5 admet deux caractères irréductibles de degré 3, à valeurs réelles, que l'on notera χ_3 et χ_3'.

3. Pour σ un 5-cycle, montrer $\chi_3(\sigma)+\chi_3'(\sigma)=1$ et $\chi_3(\sigma)^2+\chi_3'(\sigma)^2=1$ puis compléter la table des caractères de A_5.
4. Déterminer 6 représentations irréductibles de S_5, deux de dimensions 1 et deux de dimension 4 et deux de dimension 5. Déterminer leur caractères
5. En déduire un caractère irréductible de degré 6 pour S_5. Compléter la table des caractères.
6. Décomposer en représentations irréductibles la restriction de la représentation régulière de S_5 à A_5.

Exercice 6. [Le groupe affine de dimension 1]

On note $\mathrm{Aff}(\mathbb{F}_q)$ le *groupe des transformations affines* de la droite sur $\mathbb{F}_q$ i.e.

$$\mathrm{Aff}(\mathbb{F}_q)=\left\{f\colon x\longmapsto ax+b,\ ;\ \ a\in\mathbb{F}_q^\times,\ b\in\mathbb{F}_q\right\}.$$

que l'on muni de la composition. On veut connaître sa table des caractères.

1. Montrer que $\mathrm{Aff}(\mathbb{F}_q)$ est de la forme $\mathbb{F}_q\rtimes\mathbb{F}_q^\times$. Déterminer explicitement $(q-1)$ représentations de degrés 1.
2. Donner les classes de conjugaison de $\mathrm{Aff}(\mathbb{F}_q)$. En déduire qu'il n'a qu'un seul caractère irréductible de degré >1.
3. Déterminer la table des caractères de $\mathrm{Aff}(\mathbb{F}_q)$ puis, expliciter matriciellement une représentation irréductible représentation de dimension >1.

Exercice 7. [Le groupe de Heisenberg]

On rappelle que le *groupe d'Heisenberg sur* $\mathbb{F}_p$ est le sous-groupe des matrices triangulaires supérieurs unipotentes

$$\mathrm{U}_3(\mathbb{F}_p)\coloneqq\left\{\begin{pmatrix}1&a&c\\0&1&b\\0&0&1\end{pmatrix}\ ;\ a,b,c\in\mathbb{F}_p\right\}.$$

1. Rappeler que son sous-groupe dérivé est d'ordre p. En déduire p^2 caractères de degrés 1.
2. À l'aide du centre, montrer qu'il existe $(p-1)$ représentations irréductibles non isomorphes de dimensions p.
3. Déterminer la table des caractères de $\mathrm{U}_3(\mathbb{F}_p)$.

Exercice 8.

Soit G un groupe fini, χ le caractère complexe d'une représentation de G. On pose

$$K_\chi=\{g\in G\mid|\chi(g)|=\chi(1)\}.$$

1. Montrer que K_χ est un sous-groupe distingué de G.
2. Montrer que G est simple si et seulement si pour tout caractère irréductible non-trivial χ on a $K_\chi=\{e\}$.

Exercice 9. [Théorème de Burnside]

Le but de cet exercice est de montrer le théorème de Burnside : si p et q sont des nombres premiers, alors tout groupe fini G d'ordre p^aq^b est résoluble. On raisonne par contradiction. Soit G le groupe d'ordre minimal p^aq^b qui n'est pas résoluble.

1. Montrer que G est un groupe simple.
2. Montrer qu'il existe $g\in G$ tel que la classe de conjugaison de g est de cardinal q^d pour $d\geqslant 0$.
3. Montrer qu'il existe un caractère $\chi\colon G\to\mathbb{C}^*$, associé à une représentation irréductible non-trivial telle que q ne divise pas $\chi(1)$ et $\chi(g)\neq 0$.
4. Montrer que $q^d\chi(g)/\chi(1)$ est un *entier algébrique*. En déduire que $\chi(g)/\chi(1)$ est un entier algébrique.
5. Montrer que $|\chi(g)|=\chi(1)$.
6. Conclure à l'aide de l'exercice précédent.