École Normale Supérieure, Année 2021-2022

1$^{\text{e}}$ année, Algèbre 1

TD n° 5 : Groupes symétrique et actions de groupes

`À faire en priorité : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 8 ; 9`

Exercice 1.

Montrer que le centre de S_n est trivial pour $n \geqslant 3$. On pourra commencer par montrer que si un élément est dans le centre, alors il préserve chaque paire de points.

Exercice 2.

Soit $n \geqslant 2$ un entier.

1. Montrer qu'il existe un unique morphisme non trivial $\mathrm{S}_n \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
2. Soit $H \subset \mathrm{S}_n$ un sous-groupe d'indice 2. Montrer $H = \mathrm{A}_n$.
3. Montrer que tout morphisme $\mathrm{A}_n \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est trivial.
4. Déduire de la question précédente que A_4 ne possède pas de sous-groupe d'ordre 6.

Exercice 3. Générateurs de S_n

Soit $n \geqslant 2$ un entier.

1. Montrer que les transpositions $\tau_i \coloneqq (i\ i+1)$ avec $1 \leqslant i \leqslant n-1$ engendrent S_n.
2. Montrer que la transposition $\tau_1 = (1\,2)$ et le n-cycle $c = (1\,2\,\ldots\,n)$ engendrent S_n.

Exercice 4. Simplcité de A_5

On s'intéresse aux classes de conjugaison dans A_5. On commence par faire agir S_5 par conjugaison sur lui même.

1. Justifier que A_5 est stable sous cette action et identifier les orbites. Donner le cardinal de chaque orbite.
2. Une des orbites ne peut pas être une classe de conjugaison[1] de A_5, laquelle ?
3. Montrer que les autres orbites sont bien des classes de conjugaison dans A_5.
4. Montrer que l'orbite de la question 2 est l'union de deux classes de conjugaison dans A_5.
5. Déduire de la description des classes de conjugaison que A_5 est un groupe *simple*.

Exercice 5.

1. Exhiber un sous-groupe transitif de S_6 isomorphe à S_3.
2. Exhiber un sous-groupe de S_8 isomorphe à H_8.
3. Montrer pour $n < 8$, qu'aucun sous-groupe de S_n n'est isomorphe à H_8.

---

[1] *Indication* : Pour une raison de cardinal

Exercice 6. Générateurs de S_n II

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Soit a, b deux entiers tels que $1 \leqslant a < b \leqslant n$. On se donne la transposition $\tau = (a\, b)$ et le n-cycle $\sigma = (1\,2\,3\,\dots\,n)$. On se propose de montrer $\mathrm{S}_n = \langle \sigma, \tau \rangle \iff (b-a, n) = 1$.

1. Soit $d := (b-a, n)$. Montrer[2] que l'action de $\langle \sigma, \tau \rangle$ sur $\{1, 2, \dots, n\}$ préserve les classes de congruence modulo d. En déduire le sens direct.
2. Supposons que $(b-a, n) = 1$. Montrer que σ^{b-a} est un n-cycle de la forme $\sigma^{b-a} = (a\ b\ \dots)$. En déduire que $\langle \sigma, \tau \rangle$ est conjugué à $\langle (1\,2), (1\,2\,\dots\,n) \rangle$ puis conclure le sens réciproque.
3. Supposons $n = p$ un entier premier. Montrer qu'une transposition et un p-cycle quelconques engendrent S_p. Justifier que ce n'est pas le cas pour S_4 et S_6.

Exercice 7.

Soit $n \geqslant 1$ un entier.

1. Montrer que l'équation
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i} = 1,$$
n'a qu'un nombre fini de solutions $(m_1, \dots, m_n) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^n$.
2. En déduire qu'il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de groupes finis admettant exactement n classes de conjugaison.

Exercice 8. Lemme de Ore

Soient G un groupe fini et p le plus petit facteur premier de $|G|$.

1. On suppose que G agit sur un ensemble X à p éléments. Montrer que G_x agit trivialement sur X pour tout $x \in X$.
2. En déduire que tout sous-groupe de G d'indice p est distingué.

Exercice 9. Actions k-transitives

Soient G un groupe agissant sur X, $k \geq 1$ un entier, et $x \in X$.

1. Montrer que G agit $k+1$-transitivement sur X si, et seulement si, G agit transitivement sur X et G_x agit k-transitivement sur $X \smallsetminus \{x\}$.
2. En déduire que si G est fini, et agit k-transitivement sur X, alors $|X|(|X|-1)(|X|-2)\cdots(|X|-k+1)$ divise $|G|$.
3. Montrer que si un sous-groupe $G \subset \mathrm{S}_n$ agit $(n-2)$-transitivement sur $\{1, \dots, n\}$, alors on a $G = \mathrm{A}_n$ ou $G = \mathrm{S}_n$.

Exercice 10. Le groupe de Mathieu M_{11}

Soit M_{11} le sous-groupe de A_{11} engendré par les éléments $a = (1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,10\,11)$ et $b = (3\,7\,11\,8)(4\,10\,5\,6)$.

1. Montrer que M_{11} possède des éléments de type 11, $1\,2\,8$, $1\,5^2$, $1^2\,3^3$ et $1^3\,4^2$. Pour cela, on pourra vérifier les égalités $b^2a = (1\,2\,11)(3\,5\,10)(6\,8\,9)$,
$$aba^{-1}b^{-1} = (1\,9\,4\,7\,3)(5\,10\,8\,6\,11) \text{ et } aba = (1\,3\,11\,2\,8\,10\,9\,6)(4\,7).$$
2. En déduire (sans calcul) que M_{11} agit 3-transitivement sur $\{1, \dots, 11\}$.

   Soit $E = \{1, \dots, 11\}$. Pour $F \subset E$ on pose $G_F = \{g \in \mathrm{M}_{11} \mid g(F) = F\}$.
3. Montrer (sans calcul) que si $F \subset E$ a trois éléments, alors G_F agit transitivement sur $E \smallsetminus F$. En déduire que M_{11} agit transitivement sur l'ensemble des parties à 4 éléments de E.
4. Soient $F \subset E$ avec $|F| = 4$, et $f : G_F \to \mathrm{S}_F$ le morphisme naturel. Montrer (sans calcul) que $f(G_F)$ contient un 4-cycle et un 3-cycle.
5. (suite) En déduire $f(G_F) = \mathrm{S}_F$.
6. Montrer que M_{11} agit 4-transitivement sur $\{1, 2, \dots, 11\}$, puis montrer que $|\mathrm{M}_{11}|$ est multiple de $\frac{11!}{7!} = 7920$.

Mathieu a démontré l'égalité $|\mathrm{M}_{11}| = 7920$ et la simplicité de M_{11} : c'est le plus petit des groupes simples dits *sporadiques*.

[2] Plus formellement, montrer $\forall g \in \langle \sigma, \tau \rangle$, $i \equiv j \bmod d \implies g(i) \equiv g(j) \bmod d$