École Normale Supérieure, Année 2021-2022

1^{e} année, Algèbre 1

TD n° 6 : Devissages

`À faire en priorité : 1 ; 3 ; 5 ; 6-7-8`

Exercice 1.

Soit $n \geqslant 2$ un entier. Déterminer le centre, l'abélianisé et le sous-groupe dérivé du groupe diédral D_{2n}. On pourra distinguer les cas selon la parité de n.

Exercice 2.

Soit G un groupe, $H \lhd G$ un sous groupe distingué et $K \lhd H$ un sous-groupe distingué de H.

1. Donner[1] un exemple de tels G, H, K mais où K n'est pas distingué dans G.
2. Montrer que si K est un sous-groupe caractéristique de H alors $K \lhd G$.

Exercice 3. Groupes d'ordre $2p$

Soit G un groupe non abélien d'ordre $2p$ pour p premier impair.

1. Montrer que G contient un unique sous-groupe distingué d'ordre p, que l'on notera C_p.
2. Montrer $G = C_p \rtimes \langle x \rangle$ pour tout $x \in G$ d'ordre 2.
3. Montrer qu'il existe deux classes d'isomorphismes de groupes d'ordre $2p$. Lesquels ?

Exercice 4. Groupes d'ordre 8

Soit G un groupe non-abélien d'ordre 8.

1. Montrer que G contient au moins deux éléments d'ordre 4 et au moins un élément d'ordre 2.
2. S'il contient un unique élément d'ordre 2, conclure que $G \cong \mathrm{H}_8$.
3. S'il contient un unique sous-groupe cyclique d'ordre 4, conclure que $G \cong \mathrm{D}_8$.
4. Conclure.

Exercice 5. Dévissage de S_4

Soit $\mathrm{K}_4 \subset \mathrm{S}_4$ le sous groupe engendré par les doubles transpositions de S_4. Notons $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

1. Justifier que $\mathrm{Aut}(\mathrm{K}_4) \cong G$. En déduire une surjection $\mathrm{S}_4 \to G$.
2. Montrer $G \cong \mathrm{S}_3$. En déduire $\mathrm{S}_4 = \mathrm{K}_4 \rtimes \mathrm{S}_3$ où on identifie $\mathrm{S}_3 = \mathrm{S}_4(4)$, le stabilisateur de 4.
3. Soit V un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espace vectoriel de dimension 2. Expliciter un isomorphisme $V \rtimes_{\mathrm{id}} \mathrm{GL}(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}_V$ où on considère le produit semi-direct pour le morphisme $\mathrm{id}\colon \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(V)$.

Exercice 6. Dévissage du sous-groupe de Borel

Soit K un corps, $n \geqslant 1$ un entier, considérons $\mathrm{U}_n(K) \subset \mathrm{T}_n(K) \subset \mathrm{GL}_n(K)$ respectivement le sous-groupe des matrices unipotentes et le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures.

1. Dans le cas $n = 2$, donner explicitement un isomorphisme $\mathrm{T}_2(K) \cong K \rtimes_\phi (K^\times)^2$ pour le morphisme $\phi\colon (K^\times)^2 \to \mathrm{Aut}(K)$ donné par $(\lambda_1, \lambda_2) \mapsto \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.
2. Montrer que les matrices diagonales, forment un complément de $\mathrm{U}_n(K)$ dans $\mathrm{T}_n(K)$.

---

[1] *Indication* : Penser à A_4

On veut maintenant dévisser $\mathrm{U}_n(K)$. Pour s un entier tel que $0 \leqslant s \leqslant n$, notons l'application de s-ième sur-diagonale $\mathrm{diag}_s \colon \mathrm{U}_n(K) \to K^{n-s}$ formellement donnée par $g \mapsto \mathrm{diag}_s(g) \coloneqq (g_{1,1+s}, g_{2,2+s}, \dots, g_{n-s,n})$. Pour k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, soit

$$\mathrm{U}_n(K)_k \coloneqq \bigcap_{s=1}^{k} \{g \in \mathrm{U}_n(K) \mid \mathrm{diag}_s(g) = 0\}.$$

les matrices unipotentes dont les k-premières sur-diagonales sont nulles.

3. Soit s un indice de la filtration. Montrer que $\mathrm{U}_n(K)_s \lhd \mathrm{U}_n(K)_{s+1}$ puis que $\mathrm{U}_n(K)_{s+1}/\mathrm{U}_n(K)_s \cong K^{n-s-1}$.
4. En déduire que $\mathrm{U}_n(K)$ est résoluble. Conclure pour $\mathrm{T}_n(K)$.

Exercice 7. Drapeaux et co-trigonalisation

Soit K un corps et V un K-espace vectoriel de dimension finie n. Un *drapeau complet* de V est une suite croissante de K-sous-espaces

$$\mathcal{V}^\bullet \colon \{0\} = \mathcal{V}^0 \subsetneq \mathcal{V}^1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{V}^{n-1} \subsetneq \mathcal{V}^n = V.$$

En particulier $\dim \mathcal{V}^i = i$ pour tout entier i tel que $0 \leqslant i \leqslant n$. Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des drapeaux complets de V

1. Montrer que l'action de $\mathrm{GL}(V)$ sur $\mathscr{F}$ est transitive.

   Fixons une base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de V. Cette base donne un isomorphisme $V = \bigoplus_{i=1}^n K e_i \cong K^n$ et $\mathrm{GL}(V) \cong \mathrm{GL}_n(K)$ et on définit le *drapeau complet standard* $\mathcal{V}^\bullet_{\mathrm{std}}$ par $\mathcal{V}^i_{\mathrm{std}} \coloneqq \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i)$ pour tout entier i tel que $i \leqslant n$.
2. Montrer que le stabilisateur de $\mathcal{V}^\bullet_{\mathrm{std}}$ dans $\mathrm{GL}_n(K)$ est $\mathrm{T}_n(K)$.
3. En déduire que pour tout $G \subset \mathrm{GL}_n(K)$ on a l'équivalence entre :
   - G préserve un drapeau complet de K^n,
   - il existe $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ tel que $PGP^{-1} \subset \mathrm{T}_n(K)$.

   On dit alors que G est *co-trigonalisable*.

Exercice 8. Théorème de Lie-Kolchin

On se propose de montrer le théorème suivant :

Théorème 0.1 (Théorème de Lie-Kolchin)**.** *Les sous-groupes connexes de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *résolubles de classe*[2] r *préservent un drapeau complet de* $\mathbb{C}^n$.

On va raisonner par récurrence sur $m = r + n$: soit pour $m \in \mathbb{N}$, $\mathrm{LK}(m)$ l'énonce précédent pour $r + n \leqslant m$. Le but de l'exercice est de montrer $\mathrm{LK}(m) \implies \mathrm{LK}(m+1)$. Soit $m \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathrm{LK}(m)$ est vrai.

1. Montrer que $\mathrm{D}(G)$ est connexe
2. Montrer que $\mathrm{D}(G)$ est inclus dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$.
3. Conclure si $\mathrm{D}(G)$ est constitué d'homothéties.

   Soit $\mathscr{C} = \widehat{\mathrm{D}(G)}$. Pour tout caractère $\chi \in \mathscr{C}$, posons le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$,

   $$V(\chi) \coloneqq \{v \in \mathbb{C}^n \mid \forall g \in \mathrm{D}(G),\ g(v) = \chi(g)v\}.$$

   Soit $\mathrm{S} \coloneqq \{\chi \in \mathscr{C} \mid V(\chi) \neq 0\}$ comme sous-ensemble de $\mathscr{C}$.
4. Montrer $\mathrm{S} \neq \emptyset$. On pourra utiliser l'hypothèse de récurrence.
5. Montrer que les $V(\chi)$ sont en somme directes. En déduire que S est fini.

   On définit pour tout $\chi \in \mathscr{C}$ et $g \in G$, le caractère $\chi^g \in \mathscr{C}$ par $\chi^g \colon a \mapsto \chi(g^{-1}ag)$.
6. Montrer que $G \times \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ décrite par $(g, \chi) \mapsto \chi^g$ définit bien une action de groupe de G sur $\mathscr{C}$. Montrer $g\left(V(\chi)\right) = V(\chi^g)$.
7. En déduire que G agit trivialement sur $\mathrm{S} \subset \mathscr{C}$.
8. Conclure la récurrence.
9. Donner un contre-exemple dans le cas $n = 2$ pour G non connexe.

[2] i.e. r minimal tel que $\mathrm{D}^r(G) = \{0\}$