1e année, Algèbre 1

TD n° 7 : Groupes et symétries

`À faire en priorité : 1 ; 2 ; 3 ; 5`

Exercice 1. Révisions

Soit $\mathcal{C}$ un solide de Platon vu comme un convexe fermé de $\mathbb{R}^3$. On notera $\mathcal{S}$ l'ensemble de ses sommets, $\mathcal{A}$ l'ensemble de ses arrêtes et $\mathcal{F}$ l'ensemble de ses faces dont les cardinaux seront respectivement notés $\mathrm{s}, \mathrm{a}, \mathrm{f}$. Rappelons que $\mathrm{Is}(\mathcal{C}) \coloneqq \{g \in \mathrm{O}(3) \mid g(\mathcal{C}) = \mathcal{C}\}$ est le groupe des isométries de $\mathcal{C}$ et $\mathrm{Is}^+(\mathcal{C}) \coloneqq \mathrm{Is}(\mathcal{C}) \cap \mathrm{SO}(3)$ les isométries directes.

1. Montrer que $\mathrm{Is}(\mathcal{C})$ stabilise les arrêtes puis en déduire qu'il stabilise les faces. Justifier que $\mathrm{Is}^+(\mathcal{C})$ agit transitivement sur l'ensembles des arrêtes, l'ensemble des faces et sur l'ensemble des sommets.
2. Justifier que chaque face contient le même nombre d'arrêtes, que l'on notera p, puis que chaque sommet est contenu dans le même nombre d'arrêtes que l'on notera q. Montrer $\mathrm{p} \cdot \mathrm{f} = 2\mathrm{a} = \mathrm{q} \cdot \mathrm{s} = |\mathrm{Is}^+(\mathcal{C})|$
3. La paire $\{p\,;q\}_s$ est appelée le *symbole de Schläfli* de $\mathcal{C}$. Donner le symbole de Schläfli de chaque solide de Platon. Observer que le symbole de Schläfli caractérise le solide et que la dualité s'exprime par $\{p\,;q\}_s \xrightarrow{C\mapsto C^*} \{q\,;p\}_s$.
4. On note $\chi \coloneqq \mathrm{s} - \mathrm{a} + \mathrm{f}$ la *caractéristique d'Euler* de $\mathcal{C}$. Montrer $\chi = 2$.
5. Pour tout sommet $s \in \mathcal{S}$, justifier que l'angle d'une face f en s est $\alpha_f = 2\pi\left(1 - \frac{1}{p}\right)$. Soit $\delta_s = 2\pi - \sum_{f\in s}\alpha_f$ le *defaut angulaire* du sommet s et $\Delta = \sum_{s\in\mathcal{S}}\delta_s$ le défaut angulair total du solide. Montrer $\Delta = 2\pi\chi = 4\pi$.
6. Soit $\theta \in [0, 2\pi]$ l'angle entre deux faces adjacentes. Montrer
$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\cos\frac{\pi}{q}}{\sin\frac{\pi}{p}}.$$

Exercice 2. Une construction de l'icosaédre

Soit $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or. On considére les 4 points $(0, \pm1, \pm\varphi) \in \mathbb{R}^3$, sommets d'un *rectangle d'or*, ainsi que les 8 autres points obtenus en permutant circulairement leurs coordonnées :

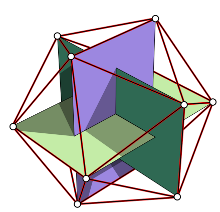

Figure 1 – *Un triplet de rectangles d'or orthogonaux dans l'icosaédre*

1. À l'aide d'une longueur bien choisie, montrer que les 12 points ci-dessus sont les sommets d'un icosaédre régulier[1] .

Notons I cet icosaèdre régulier.

2. Observer qu'il existe exactement 5 triplets de rectangles d'or orthogonaux dont les sommets sont des sommets de I, puis retrouver sans passer par le dodécaédre, un isomorphisme $\mathrm{Is}(\mathrm{I})^+ \simeq \mathrm{A}_5$.
3. Montrer que les 20 sommets du dodécaédre dual à I sont
$$\frac{1}{3}(0, \varphi, \varphi^3),\ \frac{1}{3}(\varphi^2, \varphi^2, \varphi^2),$$
et les 18 autres points qui s'en déduisent par permutation circulaire des coordonnées et changements de signes.

[1]On notera au passage que le nombre d'or est l'unique réel $\varphi > 1$ pour lequel cette assertion est vraie.

Exercice 3. Simplicité de $\mathrm{SO}(3)$

On se propose de montrer que $\mathrm{SO}(3)$ est simple.

1. Rappeler pourquoi toute isométrie directe non triviale de $\mathbb{R}^3$ fixe une, et une seule, droite vectorielle. En déduire qu'il existe un angle $\theta \in [0, 2\pi]$ tel que g soit conjugué à la matrice

$$\left[\begin{array}{c|cc} 1 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{array}\right]$$

   On dira que g est une *rotation d'angle* θ.

2. En déduire que deux éléments de $\mathrm{SO}(3)$ sont conjugués si, et seulement si, ils ont même trace.

3. Quels sont les $g \in \mathrm{SO}(3)$ avec $\operatorname{tr} g = 3$?

On raisonne par l'absurde : soit H un sous-groupe distingué de $\mathrm{SO}(3)$.

4. On suppose $[3 - \epsilon, 3] \subset \mathrm{tr}H$ avec $\varepsilon > 0$, montrer $H = \mathrm{SO}(3)$.

5. Conclure en considérant l'application $\mathrm{SO}(3) \times H \to \mathbb{R}$, donnée par $(g, h) \mapsto \mathrm{tr}[g, h]$.

Exercice 4. Simplicité de $\mathrm{SO}(2n+1)$

Soit $n \geqslant 1$ un entier.

1. Montrer à l'aide d'un commutateur bien choisi et en utilisant la simplicité de $\mathrm{SO}(3)$, que $\mathrm{SO}(2n+1)$ est simple.

2. Quels sont les sous-groupes distingués de $\mathrm{SO}(2n+2)$?

Exercice 5. Collier de Polyà

Combien de colliers différents peut on fabriquer avec 9 perles dont 4 noirs (N), 3 jaunes (J) et 2 rouges (R)? Justifier qu'on peut définir un collier comme l'orbite d'une certaine application $f\colon \{1, \dots, 9\} \to \{N, J, R\}$ sous l'action à droite du groupe diédral D_9.

Plus généralement, si on se donne un ensemble fini de couleurs indexés par une partie $F \subset \mathbb{N}$ *les entiers et* k_i *perles de la couleur* $i \in F$*, combien de collier différents sur* $n \leqslant \sum k_i$ *couleurs peut on fabriquer ?*

Exercice 6.

Soit G un groupe fini. On se donne F un ensemble fini de couleurs et X un G-ensemble. Soit $\mathscr{C} = \mathscr{C}(X\,; F)$ l'ensemble des application $X \to F$, justifier que $\mathscr{C}$ est naturellement muni d'une action à droite de G. Un coloriage est une orbite sous cette action. On veut calculer le nombre de coloriages de X sur F. On l'appliquera au cas où X est l'ensemble des faces d'un solide de Platon muni de l'action du sous-groupe des isométries du solide.

1. Montrer que le tétraèdre admet 5 coloriages des faces sur 2 couleurs. On donnera explicitement les 5 coloriages.

2. Montrer

$$|G\backslash\mathscr{C}| = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} |F|^{|X/\langle g\rangle|}.$$

   Vérifier qu'on retrouve bien les 5 coloriages du tétraèdre au 1.

3. Calculer le nombre de coloriage des faces du cube sur 3 couleurs.

Exercice 7. Sous-groupes distingués de $\mathrm{Sp}(1)$ **et** $\mathrm{SO}(4)$

1. En utilisant une suite exacte $1 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Sp}(1) \to \mathrm{SO}(3) \to 1$, déterminer les sous-groupes distingués de $\mathrm{Sp}(1)$.

2. En utilisant une suite exacte $1 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1) \to \mathrm{SO}(4) \to 1$, déterminer les sous-groupes distingués de $\mathrm{SO}(4)$.

Exercice 8.

Soit H_8 le groupe d'ordre 8 des quaternions, calculer $\mathrm{Aut}(\mathrm{H}_8)$.