École Normale Supérieure,   Année 2021-2022

1e année, Algèbre 1

TD n° 8 : Groupes et symétries II

`À faire en priorité :  1 ; (2) ; 3 ; 4-1 ; 5 ; 7`

Exercice 1. Révisions

1. Montrer qu'on a une suite exacte

$$1 \to \mathrm{PSL}_n(K) \to \mathrm{PGL}_n(K) \xrightarrow{\overline{\det}} K^\times/K^{\times n} \to 1.$$

2. Rappeler brièvement comment obtenir les isomorphismes

$$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathrm{S}_3 \text{ et } \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \cong \mathrm{S}_4.$$

3. Soit $\mathbb{F}_4$ le corps à 4 éléments[1]. Par la même méthode, montrer

$$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_4) \cong \mathrm{A}_5.$$

4. Soit $n \geqslant 2$ un entier, pour tout sous-groupe $H \subset \mathrm{S}_n$ d'indice n montrer $H \cong \mathrm{S}_{n-1}$. En déduire un isomorphisme exceptionnel qui décrit une action transitive de H sur $\{1, \ldots, n\}$.

Exercice 2. Blocs d'une action

Soit G un groupe agissant transitivement sur X. On dit qu'une partie non vide $B \subset X$ est un *bloc* (de cette action) si pour tout $g \in G$ on a soit $g(B) = B$, soit $g(B) \cap B = \emptyset$. La partie X, et les singletons de X, sont des blocs, dits *triviaux*.

1. Déterminer les blocs des actions transitives usuelles suivantes : de S_n sur $\{1, \ldots, n\}$, de K_4 sur $\{1, 2, 3, 4\}$, de $\mathrm{GL}(E)$ sur $E\backslash\{0\}$.
2. Montrer que $B \subset X$ est un bloc si, et seulement si, les parties de la forme $g(B)$ avec $g \in G$ forment une partition de X.

Si B est un bloc, son stabilisateur est le sous-groupe $G_B = \{g \in G; g(B) = B\}$ de G.

3. Soient $B \subset C$ deux blocs. Montrer $G_B \subset G_C$, et $G_B = G_C \iff B = C$.
4. Soit $x \in X$ et H un sous-groupe de G contenant G_x. Montrer que $B := Hx$ est l'unique bloc de G contenant x et vérifiant $G_B = H$.
5. En déduire que $B \mapsto G_B$ est une bijection croissante entre l'ensemble des blocs contenant x et celui des sous-groupes de G contenant G_x.

Exercice 3. Actions primitives

Une action transitive d'un groupe G sur un ensemble X est dite *primitive* si on a $|X| \geq 2$ et si ses seuls blocs sont les blocs triviaux.

1. Montrer qu'une action 2-transitive est primitive.
2. On suppose que G agit primitivement sur X, et on se donne N un sous-groupe distingué de G. Montrer que les N-orbites dans X sont des blocs.
3. En déduire que le critère d'Iwasawa vaut encore en remplaçant dans son énoncé l'hypothèse "2-transitivement" par "primitivement".
4. En utilisant l'exercice précédent, montrer qu'une action transitive de G sur X est primitive si, et seulement si, ses stabilisateurs sont des sous-groupes maximaux de G.
5. Montrer qu'une action de G sur X est 2-transitive si, et seulement si, elle est transitive et pour un $x \in X$ (ou tous) et $g \in G \setminus G_x$, on a $G = G_x \cup G_x g G_x$.

---

[1]Le corps à 4 éléments est décrit par $\mathbb{F}_4 := \{0, 1, \alpha, 1 + \alpha\}$ où $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$.

Exercice 4. Nouveaux cas d'Iwasawa

Soit $n \geqslant 3$ un entier. Pour les deux situations qui suivent, identifier les blocs puis, déterminer si les actions sont primitive ou 2-transitives et le justifier dans tous les cas. Finalement, on appliquera le critère d'Iwasawa pour retrouver des résultats déjà rencontrés.

1. Considérer X_n l'ensemble des parties à 2 éléments de $\{1, \ldots, n\}$ muni de l'action naturelle de S_n. Retrouver les sous-groupes distingués de S_n.
2. Considérer l'action naturelle de $\mathrm{O}(n)$ sur S^{n-1}. Redémontrer la simplicité de $\mathrm{SO}(3)$.

Exercice 5.

On se propose de détermine les groupes finis G tels que $\mathrm{Aut}(G)$ opère transitivement sur $G \setminus \{e\}$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ vérifie cette propriété. On va montrer que se sont les seuls.
2. Montrer que G est abélien. On pourra considérer l'action de $\mathrm{Int}(G)$ sur G pour montrer que tout les automorphismes sont extérieurs.
3. Montrer que si $G[p] \neq 0$, pour p un entier premier, alors $G[p^k] = G[p]$ et finalement $G[\ell] = 0$, pour tout entier ℓ premier à p.
4. Conclure.

Exercice 6. Demi-plan de Poincaré

1. Vérifier que l'action par homographie de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ préserve $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ et son complémentaire. Justifier que $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \widehat{\mathbb{R}} = \mathcal{H}^+ \sqcup \mathcal{H}^-$ où $\mathcal{H}^+ := \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$ et $\mathcal{H}^- := \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z < 0\}$. On appelle $\mathcal{H}^+$ le *demi-plan de Poincaré*.
2. Montrer que le stabilisateur de $\mathcal{H}^+$ dans $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$ est $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Montrer que le stabilisateur de $i \in \mathcal{H}^+$ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ s'identifie à $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Quel est le stabilisateur de $i \in \mathcal{H}^+$ dans $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$?

Exercice 7. Droite projective et birapport

Soit K un corps. Soit $\mathbb{P}^1(K)$ la droite projective sur K identifiée à $\widehat{K} = K \cup \{\infty\}$. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des quadruplets de points distincts dans $\mathbb{P}^1(K)$ muni de l'action diagonale sous $\mathrm{PGL}_2(K)$ et d'une action naturelle de S_4 en permutant les coordonnées. Ainsi, $\mathrm{S}_4 \times \mathrm{PGL}_2(K)$ opère sur $\mathcal{C}$.

1. Soit $z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathcal{C}$ et soit $g \in \mathrm{PGL}_2(K)$ tel que $(g \cdot z_1, g \cdot z_2, g \cdot z_3) = (\infty, 0, 1)$. On définit le *birapport* des quatres points de z par $\lambda(z) = [z_1, z_2, z_3, z_4] := g \cdot z_4 \in \widehat{K}$. Montrer
$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \times \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1}.$$
2. Montrer que pour $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ le birapport prend une unique valeur. Retrouver l'isomorphisme $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \cong \mathrm{S}_4$. En faire de même pour $K = \mathbb{F}_4$, montrer que le birapport prend deux valeurs et retrouver l'isomorphisme $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_4) \cong \mathrm{A}_5$.
3. Montrer que l'application $\lambda\colon \mathcal{C} \to \widehat{K}$ est constante sur les $\mathrm{PGL}_2(K)$-orbites et en déduire une bijection
$$\lambda\colon \mathcal{C}/\operatorname{PGL}_2(K) \to \widehat{K} \setminus \{0, 1, \infty\}.$$
Dans les cas où $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, justifier que λ est un homéomorphisme.
4. Montrer que l'action naturelle de S_4 sur $\mathcal{C}$ induit une action de S_3 sur $\widehat{K} \setminus \{0, 1, \infty\}$. Expliciter cette action pour obtenir qu'elle est donnée par des homographies. On trouvera qu'elle est engendré par $(12) \cdot z = 1 - z$, $(23) \cdot z = \frac{1}{z}$.
5. En déduire une bijection
$$J\colon \mathcal{C}/(\mathrm{S}_4 \times \mathrm{PGL}_2(K)) \to K.$$
6. Soit $j\colon \widehat{K} \setminus \{0, 1, \infty\} \to K$ l'application quotient sous l'action de S_3 définie au 4. En décrivant les différents stabilisateurs, montrer
$$j(\lambda) = \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(1 - \lambda^2)}.$$