École Normale Supérieure, Année 2021-2022

1^e année, Algèbre 1

TD n° 9 : Structure des groupes finis

`Cette feuille comporte des exercices de la forme "Classifier les groupes d'ordre n" ; le but est alors de donner une liste exhaustive de représentants des classes d'isomorphismes, si possible, sous la forme de produits semi-directs. À faire en priorité : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6`

Exercice 1. Groupes d'ordre pq

Soit p et q deux entiers premiers distincts. On supposera $p < q$.

1. Pour G un groupe d'ordre pq, montrer que l'on a une suite exacte scindée
$$1 \to \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \to G \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to 1.$$
2. Classifier les groupes d'ordres pq.

Exercice 2. Groupes d'ordre p^3

Soit p un nombre premier. On se propose de classifier les groupes d'ordre p^3.

1. Rappeler la classification des groupes d'ordre 8. On supposera dans la suite que $p \neq 2$.
2. Déterminer les produits semi-directs non-directs $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Conclure.

Exercice 3. Groupes simples d'ordre $\leqslant 60$.

Soit p, q et l des entiers premiers.

1. Soit G un groupe simple et soit p un nombre premier qui divise l'ordre de G. Montrer que $n_p!$ est divisible par l'ordre de G.
2. Pour $i = 0, 1, 2, 3$ montrer qu'un groupe d'ordre $p^i q$ n'est pas simple, puis qu'il est résoluble
3. Montrer qu'un groupe d'ordre p^2q^2 n'est pas simple, puis qu'il est résoluble
4. Montrer qu'un groupe d'ordre pql n'est pas simple, puis qu'il est résoluble.
5. Montrer que tout groupe simple d'ordre strictement inférieur à 60 est monogène.

Exercice 4. Groupes d'ordre p^2q

Soit p, q deux premiers distincts, on se propose de classifier les groupes d'ordre p^2q.

1. Montrer qu'un groupe d'ordre p^2q n'est pas simple. Montrer qu'il est résoluble. On distinguera, en plus des cas abéliens, 4 cas que l'on représentera par des suites exactes scindées.
2. Conclure dans le cas $p = 2$ et $q = 3$.
3. Dans chaque cas, donner une condition pour assurer l'existence de produits semi-directs non directs et compter les différentes classes d'isomorphismes. Classifier finalement les groupes d'ordre p^2q.

Exercice 5. Morphisme de transfert

Soit G un groupe fini et soit $n \geqslant 1$ un entier.

1. Soit H un sous-groupe de G d'indice n. Soit $x_1, \ldots, x_n \in G$ des représentants du quotient G/H. L'action de G sur G/H induit une action de G sur $\{1, \ldots, n\}$. Pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $g \in G$ il existe $h_{i,g\cdot i}$ tel que $gx_i = x_{g\cdot i}h_{i,g\cdot i}$. On note de plus $\pi\colon H \to H^{\mathrm{ab}}$ le morphisme canonique vers l'abélianisé de H. On définit une application $V\colon G^{\mathrm{ab}} \to H^{\mathrm{ab}}$ donnée pour $g \in G$ par
$$V(g) = \pi\left(\prod_{i=1}^{n} h_{i,g\cdot i}\right).$$
Montrer que V est un morphisme bien défini, indépendant du choix des représentants x_i. C'est le *morphisme de transfert*.

2. On garde les notations précédentes. Pour $h \in H$, on note $\langle h \rangle$ le sous-groupe cyclique engendré par H que l'on fait agir sur G/H. Soit $g_1, \dots g_r$ des représentants des orbites pour cette action et on note $[g_i]$ la classe modulo H de ces représentants. Pour tout indice i soit n_i l'entier minimal non nul tel que $h^{n_i} \cdot [g_i] = [g_i]$. Montrer
$$V(h) = \pi \left(\prod_{i=1}^{r} g_i^{-1} h^{n_i} g_i \right).$$
3. Soit p un nombre premier divisant l'ordre de G. Soit S un p-Sylow de G et $A, B \subset S$ des parties stables par conjugaison dans S. Montrer[1] que si A et B sont conjugués dans G, alors elles le sont dans $N_G(S)$, le normalisateur de S dans G.
4. Soit S un p-Sylow de G tel que $S \subset Z(N_G(S))$. Montrer que le morphisme de transfert $V\colon G^{\text{ab}} \to S^{\text{ab}} = S$ est surjectif. En déduire qu'il existe un sous-groupe distingué H de G tel que S soit isomorphe à G/H.
5. Soit G un groupe simple d'ordre m qui n'est pas monogène. Montrer l'alternative suivante :
   - Soit m est divisible par 12.
   - Soit, pour p le plus petit nombre premier qui divise m, $v_p(m) \geqslant 3$.

Exercice 6.

Soient G un groupe fini et A un G-module. On pose l'ensemble des G-*invariants*
$$A^G = \{a \in A \mid g.a = a,\ \forall g \in G\}\} \quad \text{et l'application } \textit{norme} \quad N\colon A \to A, a \longmapsto \sum_{g \in G} g.a.$$

1. Montrer que A^G et $N(A)$ sont des sous-groupes de A avec $N(A) \subset A^G$.

On note $\mathrm{Q}(A)$ le groupe abélien quotient $A^G/N(A)$.

2. On suppose que G agit trivialement sur A. Déterminer $\mathrm{Q}(A)$.
3. On suppose que $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ agit non trivialement sur $A = \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$. Montrer $\mathrm{Q}(A) = 0$ pour $p > 2$, et $\mathrm{Q}(A) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour $p = 2$.
4. On suppose que $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ agit non trivialement sur $A = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Montrer $\mathrm{Q}(A) = 0$ pour $p > 2$, et $\mathrm{Q}(A) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour $p = 2$.

Exercice 7.

Soient $n \geq 1$ un entier, G un groupe cyclique d'ordre n et A un G-module. On s'intéresse aux extensions
$$(E)\colon 1 \to A \to \widetilde{G} \xrightarrow{\pi} G \to 1$$
On fixe une telle extension et on pose $X = \pi^{-1}(\{\tau\}) = \{g \in \widetilde{G} \mid \pi(g) = \tau\}$.

1. Montrer que pour tout $g \in X$ on a $g^n \in A^G$.
2. Montrer que l'élément $g^n \bmod N(A)$ ne dépend pas du choix de $g \in X$.
3. (suite) Montrer cet élément de $\mathrm{Q}(A)$ est nul $\iff$ (E) est scindée.
4. En déduire que si $\mathrm{Q}(A) = 0$ alors $\mathrm{H}^2\,(G\,;\,A) = 0$.
5. (Application 1) Montrer que pour $p > 2$, toute extension de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ induisant une action non triviale sur ce dernier est scindée.
6. (Application 2) Soit G un groupe cyclique agissant trivialement sur $\mathbb{C}^\times$. Montrer $\mathrm{H}^2(G, \mathbb{C}^\times) = 0$ (Schur).
7. Montrer que pour G cyclique on a un isomorphisme $\mathrm{Q}(A) \cong \mathrm{H}^2\,(G\,;\,A)$.

[1] *Hint :* Considérer deux p-Sylow de $N_G(A)$.