1e année, Algèbre 1

TD n° 6 : Notes et corrections

Exercice 1.

Soit $n \geqslant 2$ un entier. Déterminer l'abélianisé, le centre et le sous-groupe dérivé du groupe diédral D_{2n}.

Correction exercice 1

Rappelons que $\mathrm{D}_{2n} = \langle \mathrm{c} \rangle \rtimes \langle \tau \rangle \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et pour tout entier k on a la formule $\tau \mathrm{c}^k \tau = \mathrm{c}^{-k}$. Tout élément de $g \in \mathrm{D}_{2n}$ s'écrit de manière unique comme $g = \mathrm{c}^j \tau^i$ avec $i = 0, 1$ et $j = 0, 1, 2, \ldots, n$ et $\tau g \tau = \mathrm{c}^{-2j} g$, $\mathrm{c}^k g \mathrm{c}^{-k} = \mathrm{c}^{2ik} g$ donc on obtient les commutateurs

$$\forall g = \mathrm{c}^j \tau^i \in \mathrm{D}_{2n},\ [\tau, g] = \mathrm{c}^{-2j},\ [\mathrm{c}^k, g] = c^{2ik}.$$

Ainsi $g \in \mathrm{Z}(\mathrm{D}_{2n})$ si, et seulement si $g \in \langle \mathrm{c} \rangle$ et $g^2 = e$. Ainsi, si n est impair le centre est trivial et si n est pair $\mathrm{Z}(\mathrm{D}_{2n}) = \langle \mathrm{c}^{n/2} \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Pour le sous-groupe dérivé, les formules des commutateurs nous donnent que $\langle \mathrm{c}^2 \rangle \subset \mathrm{D}(\mathrm{D}_{2n})$. On en déduit que si n est impair, comme $\langle \mathrm{c}^2 \rangle = \langle \mathrm{c} \rangle$, donc $\mathrm{D}(\mathrm{D}_{2n}) = \langle \mathrm{c} \rangle \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\mathrm{D}_{2n}^{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Dans le cas où n est pair, le sous-groupe $\langle \mathrm{c}^2, \tau \rangle \subset \mathrm{D}_{2n}$ est d'indice 2, donc distingué. Ainsi, l'intersection $\langle \mathrm{c} \rangle \cap \langle \mathrm{c}^2, \tau \rangle = \langle \mathrm{c}^2 \rangle$ est un sous-groupe distingué d'indice 4 dont le quotient est engendré par la classe de τ et celle c. Formellement,

$$\pi \colon \mathrm{D}_{2n} \xrightarrow{\tau, \mathrm{c} \longmapsto \bar{\tau}, \bar{\mathrm{c}}} \frac{\mathrm{D}_{2n}}{\langle \mathrm{c}^2 \rangle} = \langle \bar{\mathrm{c}} \rangle \cdot \langle \bar{\tau} \rangle \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$$

Donc comme le quotient est abélien, on obtient que $\mathrm{D}(\mathrm{D}_{2n}) \subset \mathrm{Ker}(\pi) = \langle \mathrm{c}^2 \rangle$ est un sous-groupe distingué. Donc si n est pair, on a montré $\mathrm{D}(\mathrm{D}_{2n}) = \langle \mathrm{c}^2 \rangle$ et $\mathrm{D}_{2n}^{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 2.

Soit G un groupe, $H \lhd G$ un sous groupe distingué et $K \lhd H$ un sous-groupe distingué de H.

1. Donner[1] un exemple de tels G, H, K mais où K n'est pas distingué dans G.
2. Montrer que si K est un sous-groupe caractéristique de H alors $K \lhd G$.

Correction exercice 2

1. En effet, $G = \mathrm{A}_5$, $H = \mathrm{A}_4$ et $\mathrm{K} = \mathrm{K}_4$ vérifient les hypothèses.
2. Soit $g \in G$ et soit $\mathrm{int}_g \colon G \to G$ la conjugaison par G. Comme H est distingué, $\mathrm{int}_g(H) \subset H$ et donc la restriction à H donne $\mathrm{int}_g \in \mathrm{Aut}(H)$. Ceci donne un morphisme $G \to \mathrm{Aut}(H)$ qui se factorise par $\mathrm{Int}(G)$. Si K est un sous-groupe caractéristique de H, $\forall \phi \in \mathrm{Aut}(H)$, $\phi(K) = K$ donc en particulier pour $\phi = \mathrm{int}_g$ on obtient $gKg^{-1} = K$. On a montré que K est distingué dans G.

Exercice 3. Groupes d'ordre $2p$

Soit G un groupe non abélien d'ordre $2p$ pour p premier impair.

1. Montrer que G contient un unique sous-groupe distingué d'ordre p, que l'on notera C_p.
2. Montrer $G = C_p \rtimes \langle x \rangle$ pour tout $x \in G$ d'ordre 2.
3. Montrer qu'il existe deux classes d'isomorphismes de groupes d'ordre $2p$. Lesquels ?

---

[1] *Indication* : Penser à A_4

Correction exercice 3

1. D'après le théorème de Sylow il existe un sous-groupe $C_p \subset G$ d'ordre p. Ainsi, $[G\colon \mathrm{C}_p] = 2$ donc C_p est distingué dans G. Montrons l'unicité. Si C'_p est un sous-groupe d'ordre p alors $C_p \cap C'_p$ est un sous-groupe de C_p donc $C'_p = C_p$ ou bien $C_p \cap C'_p = \{e\}$. Mais ce deuxième cas est impossible puisque sinon $\mathrm{C}_p \rtimes \mathrm{C}'_p \subset G$ et $|\mathrm{C}_p \rtimes \mathrm{C}'_p| = p^2 > 2p = |G|$. On a bien un unique sous-groupe d'ordre p. On notera $x_p \in \mathrm{C}_p$ un générateur.

2. Toujours d'après Sylow (ou le théorème de Cauchy), G contient des éléments d'ordre 2. Soit $x_2 \in G$ un élément d'ordre 2, alors $x_2 \notin \mathrm{C}_p$ puisque C_p ne contient pas d'élément d'ordre 2. Ainsi, $G = \mathrm{C}_p \sqcup x\mathrm{C}_p$ par cardinalité et on a bien montré $G = \mathrm{C}_p \rtimes \langle x_2 \rangle$.

3. Si G est un groupe d'ordre $2p$ qui n'est pas cyclique on obtient de la question 2 que G est un produit semi-direct interne de C_p par $\langle x_2 \rangle$. Fixons un isomorphisme $\mathrm{C}_p \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ donnant une inclusion $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \hookrightarrow G$ d'image C_p. Ainsi comme $G/\mathrm{C}_p \xrightarrow[\bar{x_2} \mapsto 1]{\sim} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on peut résumer la situation par une suite exacte courte qui existe pour tout groupe G d'ordre $2p$:

   $$1 \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 1$$

   Si G est abélien $G \cong \mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$.

   Si G n'est pas abélien, on choisit comme précédemment $x_2 \in G$ d'ordre 2, comme x_2 et $y \in \mathrm{C}_p$ ne commutent pas, $x_2 y x_2 \neq y$. Soit $\mathrm{int}_{x_2}\colon \mathrm{C}_p \to \mathrm{C}_p$ l'automorphisme donné par la conjugaison $y \mapsto x_2 y x_2$. C'est un élément d'ordre 2 de $\mathrm{Aut}(\mathrm{C}_p)$. Or, rappelons que $\mathrm{Aut}(C_p) \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ qui est cyclique d'ordre $p-1$ et pour tout diviseur de $(p-1)$, $\mathrm{Aut}(C_p)$ contient un unique sous-groupe de cet ordre, en particulier $\mathrm{Aut}(C_p)$ contient un unique sous-groupe d'ordre 2 que l'on notera $[-1] \in \mathrm{Aut}(C_p)$. On a ainsi obtenu $\mathrm{int}_{x_2} = [-1]$ pour tout élément d'ordre 2 de G. Ainsi, $G = \mathrm{C}_p \rtimes \langle x_2 \rangle$ s'écrit comme produit semi-direct externe $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rtimes_{[-1]} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ceci termine le cas où G n'est pas abélien.

Exercice 4. Groupes d'ordre 8

Soit G un groupe non-abélien d'ordre 8.

1. Montrer que G contient au moins deux éléments d'ordre 4 et au moins un élément d'ordre 2.
2. S'il contient un unique élément d'ordre 2, conclure que $G \cong \mathrm{H}_8$.
3. S'il contient un unique sous-groupe cyclique d'ordre 4, conclure que $G \cong \mathrm{D}_8$.
4. Conclure.

Correction exercice 4

1. On a $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ et $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

2. On a directement que G ne contient pas d'élément d'ordre 8 et tout les éléments ne sont pas d'ordre 2 puisque sinon G serait abélien. Ainsi G contient au moins un élément d'ordre 4 et donc au moins un élément d'ordre 2.

3. Dans ce cas G contient un unique élément d'ordre 2, $\alpha \in G$ et 3 éléments d'ordre 4 disons i, j et k qui engendrent des sous-groupes distincts d'ordre 4. Le sous-groupe d'ordre 2 est distingué puisqu'il est unique et donc α est central. On a nécessairement $i^2 = j^2 = k^2 = \alpha$ donc le quotient de G par le sous-groupe d'ordre 2 est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Ainsi $i^{-1} = \alpha i$ puis de même pour j et k et aussi $ij = k$ puisqu'il ne peux pas être d'ordre 2. On reconnait la table de multiplication des quaternions avec $\alpha = -1$.

4. Dans ce cas, notons $C_4 \subset G$ l'unique sous-groupe d'ordre 4 qui est distingué puisqu'il est d'indice 2. Alors $G/C_4 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et on obtient une suite exacte

   $$1 \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 1.$$

   Il existe $x_0 \in G$ d'ordre 2 qui ne s'écrit pas comme un carré et donc, comme pour l'exercice 3, on peut scinder la suite pour obtenir $G = C_4 \rtimes \langle x_0 \rangle$.

Exercice 5. Dévissage de S_4

Soit $\mathrm{K}_4 \subset \mathrm{S}_4$ le sous groupe engendré par les doubles transpositions de S_4. Notons $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

1. Justifier que $\mathrm{Aut}(\mathrm{K}_4) \cong G$. En déduire une surjection $\mathrm{S}_4 \to G$.
2. Montrer $G \cong \mathrm{S}_3$. En déduire $\mathrm{S}_4 = \mathrm{K}_4 \rtimes \mathrm{S}_3$ où on identifie $\mathrm{S}_3 = \mathrm{S}_3(4)$, le stabilisateur de 4.
3. Soit V un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espace vectoriel de dimension 2. Expliciter un isomorphisme $V \rtimes_{\mathrm{id}} \mathrm{GL}(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}_V$ où on considère le produit semi-direct pour le morphisme $\mathrm{id}\colon \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(V)$.

Correction exercice 5

1. Tout élément de K_4 est d'ordre 2 donc c'est un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espace vectoriel.

2. Le sous-groupe K_4 est distingué dans S_4 et l'action par conjugaison de S_4 sur lui même fournit donc un morphisme $\mathrm{S}_4 \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. De plus $\mathbb{P} = \mathbb{P}(K_4) = K_4 \setminus \{0\}$ qui est un ensemble à 3-éléments. Remarquons que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ qui agit librement sur $\mathbb{P}$ et donc donne un morphisme injectif $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathrm{S}_3$ qui est donc un isomorphisme par la cardinalité.

3. De ce qui précède on obtient la suite exacte voulue. Il suffit de trouver dans S_4 un complément de K_4 à l'aide de l'action sur $\{1,2,3,4\}$. Soit $\mathrm{S}_4(4) = \{\sigma \in \mathrm{S}_4 \mid \sigma(4) = 4\}$ qui est isomorphe à S_3. Les doubles transpositions n'ont aucun point fixe donc $\mathrm{S}_4(1) \cap K_4 = \{\mathrm{id}\}$. De la suite exacte on déduit que $\mathrm{S}_4 = K_4 \rtimes_\psi \mathrm{S}_4(1)$ où $\psi\colon \mathrm{S}_4(1) \subset \mathrm{S}_4 \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Exercice 6. Résolubilité du sous-groupe de Borel

Soit K un corps, $n \geqslant 1$ un entier, considérons $\mathrm{U}_n(K) \subset \mathrm{T}_n(K) \subset \mathrm{GL}_n(K)$ respectivement le sous-groupe des matrices unipotentes et le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures.

1. Dans le cas $n = 2$, donner explicitement un isomorphisme $\mathrm{T}_2(K) \cong K \rtimes_\phi (K^\times)^2$ pour le morphisme $\phi\colon (K^\times)^2 \to \mathrm{Aut}(K)$ donné par $(\lambda_1, \lambda_2) \mapsto \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

2. Montrer que les matrices diagonales, forment un complément de $\mathrm{U}_n(K)$ dans $\mathrm{T}_n(K)$.

On veut maintenant dévisser $\mathrm{U}_n(K)$. Pour s un entier tel que $0 \leqslant s \leqslant n$, notons l'application de s-ième sur-diagonale $\mathrm{diag}_s\colon \mathrm{U}_n(K) \to K^{n-s}$ formellement donnée par $g \mapsto \mathrm{diag}_s(g) \coloneqq (g_{1,1+s}, g_{2,2+s}, \ldots, g_{n-s,n})$. Pour k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, soit

$$\mathrm{U}_n(K)_k \coloneqq \bigcap_{s=1}^{k} \{g \in \mathrm{U}_n(K) \mid \mathrm{diag}_s(g) = 0\}.$$

les matrices unipotentes dont les k-premières sur-diagonales sont nulles.

3. Soit s un indice de la filtration. Montrer que $\mathrm{U}_n(K)_s \lhd \mathrm{U}_n(K)_{s+1}$ puis que $\mathrm{U}_n(K)_{s+1}/\mathrm{U}_n(K)_s \cong K^{n-s-1}$.

4. En déduire que $\mathrm{U}_n(K)$ est résoluble. Conclure pour $\mathrm{T}_n(K)$.

Correction exercice 6

Vous trouverez dans le cours la démonstration de la résolubilité de $\mathrm{T}_n(K)$.

Exercice 7. Drapeaux et co-trigonalisation

Soit K un corps et V un K-espace vectoriel de dimension finie n. Un *drapeau complet* de V est une suite croissante de K-sous-espaces

$$\mathcal{V}^\bullet\colon \{0\} = \mathcal{V}^0 \subsetneq \mathcal{V}^1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{V}^{n-1} \subsetneq \mathcal{V}^n = V.$$

En particuler $\dim \mathcal{V}^i = i$ pour tout entier i tel que $0 \leqslant i \leqslant n$. Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des drapeaux complets de V.

1. Montrer que l'action de $\mathrm{GL}(V)$ sur $\mathscr{F}$ est transitive.

   Fixons une base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de V. Cette base donne un isomorphisme $V = \bigoplus_{i=1}^n K e_i \cong K^n$ et $\mathrm{GL}(V) \cong \mathrm{GL}_n(K)$. Pour $V = K^n$, on définit le *drapeau complet standard* $\mathcal{V}^\bullet_{\mathrm{std}}$ par $\mathcal{V}^i_{\mathrm{std}} \coloneqq \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_i)$ pour tout entier i tel que $i \leqslant n$.

2. Montrer que le stabilisateur de $\mathcal{V}^\bullet_{\mathrm{std}}$ dans $\mathrm{GL}_n(K)$ est $\mathrm{T}_n(K)$.

3. En déduire que pour tout $G \subset \mathrm{GL}_n(K)$ on a l'équivalence entre :

   - G préserve un drapeau complet de K^n,
   - il existe $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ tel que $PGP^{-1} \subset \mathrm{T}_n(K)$.

   On dit alors que G est *co-trigonalisable*.

Correction exercice 7

1. Soit $\widetilde{\mathscr{F}_V} \subset V^n$ donné par $\widetilde{\mathscr{F}_V} := \{v = (v_1, \ldots v_n) \in V^n \mid \det(v) \neq 0\}$, c'est l'ensemble des bases ordonnées de V que l'on muni de l'action diagonale de $\mathrm{GL}(V)$. On sait que $\mathrm{GL}(V)$ agit (simplement) transitivement sur cet ensemble, c'est d'ailleurs une traduction de la n-transitivité de l'action de $\mathrm{GL}(V)$ sur V. À tout élément $v \in \widetilde{\mathscr{F}_V}$ on associe un drapeau complet noté $\Pi(v)$ par

$$\Pi(v) := \{0\} \subsetneq Kv_1 \subsetneq Kv_1 \oplus Kv_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \bigoplus_{i=1}^{n-1} Kv_i \subsetneq \bigoplus_{i=1}^{n} Kv_i = V.$$

   Ceci donne une application $\Pi \colon \widetilde{\mathscr{F}_V} \to \mathscr{F}$ qui est surjective et *équivariante* au sens où $\Pi(g \cdot v) = g(\Pi(v))$. L'action de $\mathrm{GL}(V)$ sur $\mathscr{F}$ est donc transitive.

2. Le stabilisateur d'un drapeau $\mathcal{V} \in \mathscr{F}$ est donné par $\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}(V)}(\mathcal{V}) = \{g \in \mathrm{GL}(V) \mid \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ g \cdot \mathcal{V}^i \subseteq \mathcal{V}^i\}$. Pour le drapeau standard, la condition du stabilisateur se réecrit matriciellement pour $g = (g_{i,j}) \in \mathrm{GL}_n(K)$ par $g \cdot e_i \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_i)$ i.e. $g \in \mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_n(K)}(\mathcal{V}^\bullet_{\mathrm{std}}) \iff \left[\forall i,j \in \{1,2,\ldots,n\}^2,\ j \geqslant i \implies g_{i,j} = 0\right]$. C'est exactement la condition d'être triangulaire supérieure donc $\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_n(K)}(\mathcal{V}^\bullet_{\mathrm{std}}) = \mathrm{T}_n(K)$.

3. Avec les notations des questions précédentes, on a finalement montré que pour $v \in \widetilde{\mathscr{F}_V}$, $\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}(V)}(\Pi(v)) = \mathrm{T}_v(V)$ les matrices triangulaires supérieures dans la base v. Comme l'action de $\mathrm{GL}_n(K)$ est transitive sur les bases, la deuxième condition revient à demander qu'il existe une base dans laquelle G est constitué de matrices triangulaires supérieures. De plus, on sait que le stabilisateur de $g \cdot v$ est le conjugué par g du stabilisateur de v. Comme l'action est transitive sur les bases et les drapeaux, on en déduit que les deux conditions sont équivalentes.

Exercice 8. Théorème de Lie-Kolchin

On se propose de montrer le théorème suivant :

Théorème 0.1 (Théorème de Lie-Kolchin)**.** *Les sous-groupes connexes de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *résolubles de classe*[2] r *préservent un drapeau complet de* $\mathbb{C}^n$*.*

On va raisonner par récurrence sur $m = r + n$: soit pour $m \in \mathbb{N}$, $\mathrm{LK}(m)$ l'énonce précédent pour $r + n \leqslant m$.
Le but de l'exercice est de montrer $\mathrm{LK}(m) \implies \mathrm{LK}(m+1)$. Soit $m \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathrm{LK}(m)$ est vrai.

1. Montrer que $\mathrm{D}(G)$ est connexe
2. Montrer que $\mathrm{D}(G)$ est inclus dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$.
3. Conclure si $\mathrm{D}(G)$ est constitué d'homothéties.

Soit $\mathscr{C} = \widehat{\mathrm{D}(G)}$. Pour tout caractère $\chi \in \mathscr{C}$, posons le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$,

$$V(\chi) := \{v \in \mathbb{C}^n \mid \forall g \in \mathrm{D}(G),\ g(v) = \chi(g)v\}.$$

Soit $\mathrm{S} := \{\chi \in \mathscr{C} \mid V(\chi) \neq 0\}$ comme sous-ensemble de $\mathscr{C}$.

4. Montrer $\mathrm{S} \neq \emptyset$. On pourra utiliser l'hypothèse de récurrence.
5. Montrer que les $V(\chi)$ sont en somme directes. En déduire que S est fini.

On définit pour tout $\chi \in \mathscr{C}$ et $g \in G$, le caractère $\chi^g \in \mathscr{C}$ par $\chi^g \colon a \mapsto \chi(g^{-1}ag)$.

6. Montrer que $G \times \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ décrite par $(g, \chi) \mapsto \chi^g$ définit bien une action de groupe de G sur $\mathscr{C}$. Montrer $g\left(V(\chi)\right) = V(\chi^g)$.
7. En déduire que G agit trivialement sur $\mathrm{S} \subset \mathscr{C}$.
8. Conclure la récurrence.
9. Donner un contre-exemple dans le cas $n = 2$ pour G non connexe.

[2]i.e. r minimal tel que $\mathrm{D}^r(G) = \{0\}$

Correction exercice 8

1. L'application $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ donnée par le commutateur $(a, b) \mapsto [a, b]$ est continue donc l'image notée $[U, V]$ d'un produit de connexes $U \times V$, est connexe. De même, l'image par l'application produit $U \cdot V$ est connexe. On sait que $\mathrm{D}(G)$ est engendré par $[G, G]$ et on considère $\mathrm{D}(G)_k \coloneqq \underbrace{[G,G][G,G]\cdots[G,G]}_{k\text{-fois}}$ qui est connexe.

   Alors la réunion croissante de la famille $\mathrm{D}(G)_k$ recouvre $\mathrm{D}(G)$ et comme $\mathrm{id} \in \mathrm{D}(G)_k$ pour tout indice k, $\mathrm{D}(G)$ est connexe.

2. Comme $\det\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^\times$ est un morphisme vers un groupe abélien $\mathrm{D}(G) \subset \operatorname{Ker}\det = \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$.

3. Les homothéties de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ sont annulés par le polynôme $X^n - 1$ donc si $\mathrm{D}(G)$ constitué d'homothéties alors l'application $\mathrm{D}(G) \to \mathbb{C}^\times$ qui a une homothétie, associe sont rapport, est injective et d'image dans l'ensemble $\{x \in \mathbb{C}^\times \mid x^n = 1\} = \mu_n(\mathbb{C})$. De plus, elle est continue et donc par connexité l'image est connexe donc triviale et on en déduit que $\mathrm{D}(G) = \{\mathrm{id}\}$. Donc G est résoluble de classe 1.

4. On veut montrer qu'il existe une droite dans $\mathbb{C}^n$ qui est stable sous l'action de $\mathrm{D}(H)$ pour tout sous-groupe Hde $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que H est résoluble de classe r. Or dans ce cas $\mathrm{D}(H)$ est résoluble de classe $r-1$ donc d'après l'hypothèse de récurrence $\mathrm{LK}(m-1)$ le groupe $\mathrm{D}(H)$ préserve un drapeau complet de $\mathbb{C}^n$ donc a fortiori une droite. Le groupe $\mathrm{D}(H)$ agit donc par un caractère χ sur cette droite et donc elle est contenue dans $V(\chi)$.

5. On va montrer que l'application naturelle

$$\mathrm{S}\colon \prod_{\chi \in S} V(\chi) \to V,\ \text{décrite par } \mathrm{S}\colon (v_\chi)_{\chi \in S} \longmapsto \sum_{\chi \in S} v_\chi$$

   est injective, ce qui assure que S est fini puisque alors $|S| \leqslant \sum_{\chi \in S} \dim_{\mathbb{C}} V_\chi \leqslant \dim_{\mathbb{C}} V = n$. Soit $w = (w_\chi)_{\chi \in S} \in \operatorname{Ker}\mathrm{S}$ une famille choisie telle qu'en posant $S_w \coloneqq \{\chi \in S \mid w_\chi \neq 0\}$, la partie $S_w \subset S$ soit minimal pour l'inclusion.

   On n'a rien à démontrer si $\forall \chi \in S,\ w_\chi = 0$ donc supposons qu'il existe au moins un $\chi_0 \in S$ tel quel $w_{\chi_0} \neq 0$ ce qui implique qu''il existe un autre caractère $\chi_1 \neq \chi_0$ tel que $w_{\chi_1} \neq 0$ et quitte à échanger χ_0 et χ_1 on peut supposer que $\chi_0 \neq 1$. Ainsi $g \cdot w_{\chi_0} = \chi_0(g) w_{\chi_0} \neq w_{\chi_0}$ et donc

$$0 = (\chi_0(g) - g) \cdot w_{\chi_0} = -(\chi_0(g) - g) \sum_{\chi \in S_w \setminus \{\chi_0\}} w_\chi = - \sum_{\chi \in S_w \setminus \{\chi_0\}} (\chi_0(g) - \chi_1(g)) w_\chi.$$

   On a ainsi construit la famille non nulle $w' = ((\chi_0(g) - \chi_1(g))w_\chi)_{\chi \in S}$ vérifiant bien $\emptyset \neq S_{w'} \subsetneq S_w$, ce qui contredit l'hypothèse de minimalité. On remarquera qu'on utilise l'indépendance des caractère et il devrait être possible de l'appliquer directement.

6. Un petit calcul nous donne $(\chi^g)^{g'} = \chi^{gg'}$ donc G opère sur $\mathscr{C}$ et

$$g \cdot V(\chi) = \left\{v \in \mathbb{C}^n \mid \forall d \in \mathrm{D}(G),\ g \cdot d \cdot (g^{-1} \cdot v) = \chi(d) v\right\},$$

   et donc en conjugant $\mathrm{D}(G)$ par g^{-1}, qui est bien une bijection puisque $\mathrm{D}(G)$ est distingué et on obtient $g \cdot V(\chi) = V(\chi^g)$.

7. Par définition on obtient déjà que $\mathrm{D}(G)$ agit trivialement sur S. Par suite, l'action de G sur S se fait au travers du quotient $G \to G/\mathrm{D}(G) = G^{\mathrm{ab}}$. Or, un groupe abélien agissant par conjugaison agit trivialement et donc $\chi^g = \chi,\ \forall g \in G$ i.e. G opère trivialement sur S.

8. On montré que l'action de G préservait les $V(\chi)$, ainsi l'action de G sur $V_S \coloneqq \bigoplus_{\chi \in S} V(\chi)$ fournit un morphisme $G \to \prod_{\chi \in S} \mathrm{SL}(V(\chi))$ dont on note $G' = \prod_{\chi \in S} G'_\chi$ l'image. Par l'hypothèse de récurrence sur la dimension on en déduit que les $G'\chi$ préservent un drapeau complet et donc G' aussi. En réalité, pour initier la récurrence il suffit de trouver une droite stable par G, ce qu'on a bien obtenu.

9. Il faut penser au groupe fini des quaternions H_8, qui n'est pas connexe, résoluble et ne fixe en effet aucun drapeau complet.

Exercice 9.

Soit K un corps et $n \geqslant 1$ un entier. Montrer que le centre de $\mathrm{GL}_n(K)$ est un complément de $\mathrm{SL}_n(K)$ si, et seulement si n est la caractéristique du corps K.