École Normale Supérieure, Année 2021-2022

1e année, Algèbre 1

TD n° 7 : Groupes et symétries

Exercice 1. Révisions

Soit $\mathcal{C}$ un solide de Platon vu comme un convexe fermé de $\mathbb{R}^3$. On notera $\mathcal{S}$ l'ensemble de ses sommets, $\mathcal{A}$ l'ensemble de ses arêtes et $\mathcal{F}$ l'ensemble de ses faces dont les cardinaux seront respectivement notés $\mathrm{s}, \mathrm{a}, \mathrm{f}$. Rappelons que $\mathrm{Is}(\mathcal{C}) \coloneqq \{g \in \mathrm{O}(3) \mid g(\mathcal{C}) = \mathcal{C}\}$ est le groupe des isométries de $\mathcal{C}$ et $\mathrm{Is}^+(\mathcal{C}) \coloneqq \mathrm{Is}(\mathcal{C}) \cap \mathrm{SO}(3)$ les isométries directes.

1. Montrer que $\mathrm{Is}(\mathcal{C})$ stabilise les arêtes puis en déduire qu'il stabilise les faces. Justifier que $\mathrm{Is}^+(\mathcal{C})$ agit transitivement sur l'ensembles des arrêtes, l'ensemble des faces et sur l'ensemble des sommets.
2. Justifier que chaque face contient le même nombre d'arrêtes, que l'on notera p, puis que chaque sommet est contenu dans le même nombre d'arrêtes que l'on notera q. Montrer $\mathrm{p} \cdot \mathrm{f} = 2\mathrm{a} = \mathrm{q} \cdot \mathrm{s} = |\mathrm{Is}^+(\mathcal{C})|$
3. La paire $\{p\,;q\}_s$ est appelée le *symbole de Schläfi* de $\mathcal{C}$. Donner le symbole de Schläfli de chaque solide de Platon. Observer que le symbole de Schläfli caractérise le solide et que la dualité s'exprime par $\{p\,;q\}_s \xrightarrow{C \mapsto C^*} \{q\,;p\}_s$.
4. On note $\chi \coloneqq \mathrm{s} - \mathrm{a} + \mathrm{f}$ la *caractéristique d'Euler* de $\mathcal{C}$. Montrer $\chi = 2$.
5. Pour tout sommet $s \in \mathcal{S}$, justifier que l'angle d'une face f en s est $\alpha_f = \pi\left(1 - \frac{2}{p}\right)$. Soit $\delta_s = 2\pi - \sum_{f \in s} \alpha_f$ le *defaut angulaire* du sommet s et $\Delta = \sum_{s \in \mathcal{S}} \delta_s$ le défaut angulair total du solide. Montrer $\Delta = 2\pi\chi = 4\pi$.
6. Soit $\theta \in [0, 2\pi]$ l'angle entre deux faces adjacentes. Montrer
$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{\cos \frac{\pi}{q}}{\sin \frac{\pi}{p}}.$$

Correction exercice 1

Vous trouverez la plupart de ces propriétés dans le cours. Comme le lien entre le cours et cette présentation n'a pas été très enrichissante, je me propose de détailler un peu, sans grandes ambitions, comment on peut formaliser l'étude des solides de Platon en partant de considérations topologiques.

Commençons par éclairer comment définir un polyèdre régulier de $\mathbb{R}^3$ en terme de topologie et de convexité.

Définition 0.1. Soit $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ un convexe fermé et borné de $\mathbb{R}^3$.

- On note $\partial\mathcal{C} = \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}^\circ$ le *bord* de $\mathcal{C}$, où $\mathcal{C}^\circ \subset \mathcal{C}$ désigne l'intérieur de $\mathcal{C}$.
- On dit qu'un point $x \subset \partial\mathcal{C}$ est un *point extrémal* si $\mathcal{C} \setminus \{x\}$ est convexe.
- Une partie fermé du bord $F \subset \partial\mathcal{C}$ de la forme $F = \mathcal{C} \cap (v + H)$ pour $v \in \mathbb{R}^3$ et $H \subset \mathbb{R}^3$ un hyperplan est appelé une *(2-)face* si $F - v$ est d'intérieur non vide dans H.

Rappelons que le théorème de Carathéodory affirme que tout convexe est l'enveloppe convexe de ses points extremaux. L'enveloppe convexe d'une partie est le plus petit convexe fermé contenant cet ensemble (i.e. l'intersection de tous les convexes contenant la partie). On peut définir un *polyèdre* dans $\mathbb{R}^3$ comme l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points qui ne sont pas contenus dans un plan. (i.e. les points ne sont pas contenus dans un plan vectoriel). Une définition équivalente est un convexe fermé et borné de $\mathbb{R}^3$ d'intérieur non vide et tel que son bord soit la réunion de ses faces. On récapitule, pour $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ un polyèdre :

- On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des points extrémaux de $\mathcal{C}$. C'est l'ensemble des *sommets* de $\mathcal{C}$. Alors $\mathcal{C}$ est l'enveloppe convexe de $\mathcal{S}$. On supposera toujours que le barycentre des sommets est $0 \in \mathbb{R}^3$.
- On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des faces de $\mathcal{C}$. Chaque face $F \in \mathcal{F}$ est l'enveloppe convexe d'une partie $\mathrm{S}(F) \subset \mathcal{S}$ et ∂F est la réunion de segments joignants des points de $\mathrm{S}(F)$. On notera l'ensemble de ses segments $\mathrm{A}(F)$.
- On note $\mathcal{A}$ la réunion des $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} \mathrm{A}(F)$, c'est l'ensemble des arrêtes. On dit que $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ sont *adjacentes* si $F_1 \cap F_2 = a \in \mathcal{A}$. On dit que deux sommets $s_1, s_2 \in \mathcal{S}$ sont *adjacents* si $[s_1, s_2] \in \mathcal{A}$. Pour tout $s \in \mathcal{S}$ on notera $\mathrm{A}(s)$ l'ensemble des arrêtes contenant s.

Finalement on a obtenu trois ensembles $\mathcal{S}, \mathcal{A}$ et $\mathcal{F}$, et des *relation d'adjacences* décrites par des relations sur les faces $\mathcal{F}$ et les sommets $\mathcal{S}$ indexés par les arrêtes i.e. des applications notés A, $\mathcal{F} \to \mathcal{P}(\mathcal{F})$ associant à chaque face les faces adjacentes et $\mathcal{S} \to \mathcal{P}(\mathcal{S})$ associant à chaque sommet les sommets adjacents. Notons que ces ensembles sont constitués de parties du bord $\partial\mathcal{C}$ et qu'ils en définissent une partition :

$$\partial\mathcal{C} = \bigsqcup_{F\in\mathcal{F}} F^\circ \sqcup \bigsqcup_{A\in\mathcal{A}} A^\circ \sqcup \bigsqcup_{s\in\mathcal{S}} \{s\}$$

où les relations d'adjacences correspondent aux relations de bord i.e. $\partial F = \bigsqcup_{A\in\mathrm{A}(F)} A^\circ \sqcup \mathrm{S}(F)$. Notons $\mathrm{Is}(\mathcal{C}) \subset \mathrm{SO}(3)$ les isométries qui préserve $\mathcal{C}$. Comme se sont des applications continues, elle préservent le bord de $\mathcal{C}$. Comme l'image d'un convexe par une isométrie est convexe, $\mathrm{Is}(\mathcal{S})$ préserve les points extrémaux : on en déduit une action sur $\mathcal{S}$. De plus, l'image d'un plan affine est un plan affine ainsi l'action préserve les faces mais donc aussi le bord des faces. On en déduit une action sur $\mathcal{F}$ et $\mathcal{A}$ préservant les relations d'adjacences. On peut considérer le stabilisateur d'un sommet $s \in \mathcal{S}$ d'une face $F \in \mathcal{F}$ ou d'une arête $A \in \mathcal{A}$ notés respectivement $\mathrm{Stab}(s)$, $\mathrm{Stab}(F)$, $\mathrm{Stab}(A)$.

On dit que $\mathcal{C}$ est un *polyèdre* régulier si $\mathrm{Is}^+(\mathcal{C})$ agit transitivement sur les faces, arrêtes et sommets. Pour un polyèdre régulier on a

$$\mathrm{Is}^+(\mathcal{C}) \cong \{g \in \mathrm{S}_\mathcal{S} \mid \forall s \in \mathcal{S},\ g\cdot \mathrm{A}(s) = \mathrm{A}(g\cdot s)\} \cong \{g \in \mathrm{S}_\mathcal{F} \mid \forall F \in \mathcal{F},\ g\cdot \mathrm{A}(F) = \mathrm{A}(g\cdot F)\}.$$

Pour $F \in \mathcal{F}$, le stabilisateur $\mathrm{Stab}(F)$ agit transitivement sur $\mathrm{A}(F)$ puis de même et le stabilisateur $\mathrm{Stab}(s)$ d'un sommet $s \in \mathrm{S}$ agit transitivement sur $\mathrm{A}(S)$. L'action de $\mathrm{Stab}(s)$ sur $\mathrm{A}(S)$ est simplement transitive, car une isométrie qui fixe deux sommets adjacents, fixe deux droites de $\mathbb{R}^3$ et donc est triviale puis comme l'action est transitive sur les sommets et que $\mathrm{Stab}(g\cdot s) = g\mathrm{Stab}(s)g^{-1}$, les stabilisateurs des sommets ont tous même cardinal. De même, l'action de $\mathrm{Stab}(F)$ est simplement transitive sur $\mathrm{A}(S)$ et le cardinal de $\mathrm{Stab}(F)$ est indépendant de $F \in \mathcal{F}$. On peut ainsi définir les entiers de l'énoncé, soit $p = |\mathrm{Stab}(F)| = |A(F)|$ le nombre de coté d'une face et $q = |\mathrm{Stab}(s)| = |A(s)|$ le nombre d'arrêtes contenant un sommet. De plus, les relations orbites-stabilisateurs nous donnent bien $\mathrm{p}\cdot\mathrm{f} = \mathrm{q}\cdot\mathrm{s} = |\mathrm{Is}^+(\mathcal{C})|$ et puisqu'une arrête contient deux sommets, la remarque précédente nous assure que $\mathrm{Stab}(a) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui agit en permutant les deux sommets (resp. les deux faces !), ce qui donne finalement $|\mathrm{Is}^+(\mathcal{C})| = 2\mathrm{a}$.

Dans le cours, on considère des sous-groupes finis de $\mathrm{SO}(3)$ que l'on fait agir par rotations sur $\mathbb{R}^3$ où plus particulièrement sur la sphère S^2. Soit $G \subset \mathrm{SO}(3)$ un sous-groupe fini, on se place dans le cas où les orbites de l'action sur la sphère ne sont pas contenues dans un plan. On dit qu'une droite $\mathbb{R}\cdot x$ avec $x \in \mathrm{S}^2$ est un pôle de G si $\exists g \in G,\ g\cdot x = x$. On note $\mathcal{P}(G)$ l'ensemble des pôles de G. Le groupe G agit sur $\mathcal{P}(G)$ et l'action décrit 3 orbites et donc une partition $\mathcal{P}(G) = \bigsqcup_{i=1}^3 \mathcal{P}_i(G)$. Le stabilisateur de chaque pôle est non nul et notons $n_i = |\mathrm{Stab}(\mathcal{P}_i(G))|$. La classe de conjugaison de G est alors caractérisé par le cardinal des stabilisateurs. Dans le cours, on classifie alors le type $(|G|; n_1, n_2, n_3)$ et il est démontré à partir de la partition de $\mathcal{P}(G)$ en orbites et la relation orbites-stabilisateurs :

$$\sum_{i=1}^3 \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{|G|}\right)$$

On peut supposer que $n_1 = 2$. L'enveloppe convexe de $\mathcal{P}_2(G)$ et $\mathcal{P}_3(G)$ définissent alors des polyèdres respectivement d'invariant de Schläfi $\{n_2; n_3\}$ et $\{n_3; n_2\}$. Pour le sous-groupe de $\mathrm{SO}(3)$, les deux polyèdres régulier sont indistinguables.

Ainsi pour un polyèdre régulier $\mathcal{C}$ d'invariant $\{p; q\}$ centré en 0, comme $\mathrm{Is}^+(\mathcal{C}) \subset \mathrm{SO}(3)$ est un groupe fini, on réecrit la formule précédente en

$$|\mathrm{Is}^+(\mathcal{C})| \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = 2$$

Puisqu'on a montré $\mathrm{p}\cdot\mathrm{f} = 2\mathrm{a} = \mathrm{q}\cdot\mathrm{s} = |\mathrm{Is}^+(\mathcal{C})|$, on obtient que $\chi(\mathcal{C}) = \mathrm{s} - \mathrm{a} + \mathrm{f} = 2$.

Remarque 0.2 (Une réflexion méta)**.** Il est intéressant de noter que $\chi = 2$ est une propriété topologique et qu'elle s'obtient formellement depuis une relation de théorie des groupes pour une action sur la sphère. En réalité, une action par isométries d'un groupe fini sur l'espace est entièrement structuré par les symétries internes de la sphère, ce qui est inhérent à sa topologie ; et justement, on a exploité ces symétries sous forme de contraintes, ce qui s'est avéré suffisant pour classifier les sous-groupes finis de $\mathrm{SO}(3)$ mais seulement à conjugaison près. La suite de l'histoire sur les angles et la courbure n'échappe pas non plus à ce principe naturel. Le théorème de Descartes exprime que le défaut angulaire global est un invariant topologique et non métrique comme on pourrait s'y attendre. Il s'énonce facilement pour les polyèdres convexes en dimensions supérieures. Le défaut angulaire mesure l'écart au principe euclidien "la somme des angles d'un triangle est π" qui s'exprime en termes d'une quantité métrique : la courbure. C'est le théorème de Gauss-Bonnet pour des variétés riemanniennes qui énonce que la moyenne de la courbure ne dépend que de la classe d'homéomorphisme. Cependant, l'expression des angles caractéristiques d'un polyèdre régulier est bien un invariant conforme[1] qui ne dépend pas uniquement de la classe de conjugaison du groupe d'isométries.

[1]Transformation conforme = transformation qui préserve les angles = similitude

Soit $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ un polyèdre régulier d'invariant $\{p; q\}$. Soit $s \in \mathcal{S}$ un sommet, en considérant le plan $H_s := (\overrightarrow{Os})^\perp$ orthogonal au pôle défini par s on obtient un morphisme injectif $\mathrm{Stab}(s) \hookrightarrow \mathrm{SO}(H_s) \cong \mathrm{SO}(2)$ et qui identifie $\mathrm{Stab}(s)$ au sous-groupe monogène $\langle R(\frac{2\pi}{q})\rangle \cong \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. De même en considérant une face $F \in \mathcal{F}$ et $f \in \mathcal{C}$ son barycentre, on obtient un morphisme injectif $\mathrm{Stab}(F) \hookrightarrow \mathrm{SO}(H_f)$qui identifie $\mathrm{Stab}(F)$ au sous-groupe monogène $\langle R(\frac{2\pi}{p})\rangle \cong \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ ce qui traduit que chaque face est un polygone à p cotés. Or l'angle interne en un sommet d'un polygone à p coté est $\alpha_p = \pi\left(1 - \frac{2}{p}\right)$. Comme chaque sommet est adjacent à q faces le défaut en un sommet s est

$$\delta_s = \pi\left(2 - q + \frac{2q}{p}\right) = 2\pi\left(1 - \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{s}} + \frac{\mathrm{f}}{\mathrm{s}}\right).$$

Comme le défaut en chaque sommet est égale à δ_s, le défaut total est $\mathrm{s}\delta_s$ ce qui donne bien $\Delta = 2\pi\chi = 4\pi$.

`Je n'ai pas réussi à détailler un argument direct qui me convient et qui utilise ce qui précède pour la dernière égalité. Tout argument élégant est bienvenu !`

Exercice 2. Simplicité de $\mathrm{SO}(3)$

On se propose de montrer que $\mathrm{SO}(3)$ est simple.

1. Rappeler pourquoi toute isométrie directe non triviale de $\mathbb{R}^3$ fixe une, et une seule, droite vectorielle. En déduire qu'il existe un angle $\theta \in [0, 2\pi]$ tel que g soit conjugué à la matrice

$$\left[\begin{array}{c|cc} 1 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{array}\right] \quad \text{où } R(\theta) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(2).$$

   On dira que g est une *rotation d'angle* θ.

2. En déduire que deux éléments de $\mathrm{SO}(3)$ sont conjugués si, et seulement si, ils ont même trace.

3. Quels sont les $g \in \mathrm{SO}(3)$ avec $\mathrm{tr}\, g = 3$?

Soit H un sous-groupe distingué non-trivial de $\mathrm{SO}(3)$; on veut montrer $H = \mathrm{SO}(3)$.

4. On suppose $[3 - \epsilon, 3] \subset \mathrm{tr}H$ avec $\varepsilon > 0$, montrer $H = \mathrm{SO}(3)$.

5. Conclure en considérant l'application $\mathrm{SO}(3) \times H \to \mathbb{R}$, donnée par $(g, h) \mapsto \mathrm{tr}[g, h]$.

Correction exercice 2

1. Soit $g \in \mathrm{SO}(3)$ tel que $g \neq \mathrm{id}_3$. Le polynôme caractéristique de g, que l'on note $\chi_g(T)$ est de degré 3 et admet donc une racine réelle λ_1. L'espace propre $\mathrm{Ker}(g - \lambda_1 \mathrm{id}_3)$ est de dimension 1 car si χ_g à deux racines réelles alors il en à trois puisque $\chi_g(T)$ est à coefficients réels et dans ce cas $g = \mathrm{id}_3$. On fixe vunecteur propre $v_1 \in \mathbb{R}^3$ correspondant, que l'on peut supposer de norme 1. Mais comme g est une isométrie $\|v_1\| = \|g \cdot v_1\| = |\lambda| \cdot \|v_1\|$ et donc $\lambda_1 = \pm 1$. Pour $H = \langle v_1\rangle^\perp$ la restriction $g_H = g\big|_H$ est une isométrie et donc $g_H \in \mathrm{SO}(2)$ et il existe donc un angle θ tel que $g_H = R(\theta)$ ce qui permet finalement de conclure, quitte à substituer $\theta \mapsto \theta + \pi$, que $g = \langle v_1 ; \cdot\rangle v_1 + R(\theta)$ compatible à la décomposition $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \cdot v_1 \oplus H$, c'est bien ce qu'on voulait.

2. On déduit de la question précédente que $\chi_g(T) = (T - 1)(T^2 - 2\cos\theta T + 1)$ et on remarque que la trace $\mathrm{tr}(g) = 1 + 2\cos\theta$ détermine l'angle de g à $\pi\mathbb{Z}$ près. Ainsi, deux isométries directes ont la même trace si, et seulement si, elles ont même polynôme caractéristiques. De plus, deux isométries sont conjugués si et seulement si la différence de leur angles appartient à $\pi\mathbb{Z}$. Ainsi elles sont conjugués si et seulement si elles ont même trace.

3. On a $\mathrm{tr}\,\mathrm{id}_3 = 3$ et réciproquement si $g \in \mathrm{SO}(3)$ est tel que $\mathrm{tr}(g) = 3$ alors $\theta \in \pi\mathbb{Z}$. Mais alors $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ et donc $g = \mathrm{id}_3$.

4. Soit $g \in H$ une isométrie d'axe $v_1 \in \mathbb{R}^3$. Alors pour tout $h \in H$, hgh^{-1} est d'axe $h \cdot v_1$. Mais comme $\mathrm{SO}(3)$ agit transitivement sur les axes, si H contient une rotation d'angle θ il contient toutes les rotations d'angle $\pm\theta$. Ainsi il contient toutes les isométries d'angle θ tel que $\cos\theta \in [1 - \frac{\epsilon}{2}, 1]$. Si on choisit un axe on a donc une partie de $\mathrm{SO}(2)$ qui engendre $\mathrm{SO}(2)$ ce qui signifie que H contient tous les stabilisateurs de toutes les droites. Par la première question, $H = \mathrm{SO}(3)$.

5. Comme $ghg^{-1} \in H$ pour tout $g \in \mathrm{SO}(3)$ on obtient que $c\colon (g, h) \mapsto [g, h]$ définit une application $\mathrm{SO}(3) \times H \to H$. Cette application est continue et donc pour tout $h \in H$, $c(\cdot, h)\colon \mathrm{SO}(3) \to H$ est d'image connexe, contient l'identité et elle n'est pas triviale puisque le centre de $\mathrm{SO}(3)$ est trivial. Ainsi sa composé à $\mathrm{tr}\colon H \to \mathbb{R}$ à pour image un interval non trivial contenant 3 et on peut conclure par la question qui précède.

Exercice 3. Collier de Polyà

Combien de colliers différents peut on fabriquer avec 9 perles dont 4 noirs (N), 3 jaunes (J) et 2 rouges (R)? Justifier qu'on peut définir un collier comme l'orbite d'une certaine application $f\colon \{1,\ldots,9\} \to \{N,J,R\}$ sous l'action à droite du groupe diédral D_{18}.

Plus généralement, si on se donne un ensemble fini de couleurs indexés par une partie $F \subset \mathbb{N}$ les entiers et k_i perles de la couleur $i \in F$, combien de collier différents sur $n \leqslant \sum k_i$ couleurs peut on fabriquer ?

Correction exercice 3

On représente le collier par $\mathscr{C} = \mathscr{C}(\mu_9\,;\{N,J,R\})$. Rappelons que D_{18} contient 9 rotations d'angles $\frac{2\pi k}{9}$ pour $k = 1,\ldots,8$ et 9 reflexions conjugués à l'une d'entre elle par une rotation. On utilise Burnside et ensuite on compte les points fixes :

$$|\mathrm{D}_{19}\backslash\mathscr{C}| = \frac{1}{18}\sum_{g\in\mathrm{D}_{18}} |\mathrm{Fix}(g\,;\mathscr{C})|.$$

On ne détaille pas les raisonnements, mais on obtient les quantités suivantes :

- Si $g = \mathrm{id}$ alors $\mathrm{Fix}(g\,;\mathscr{C}) = |\mathscr{C}| = \begin{bmatrix}9\\4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix} = 1260.$
- Si g est une rotation, quel que soit l'angle[2], on obtient alors $\mathrm{Fix}(g\,;\mathscr{C}) = \emptyset$
- Si g est une reflexion on obtient alors $\mathrm{Fix}(g\,;\mathscr{C}) = \begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = 12$

Finalement on en déduit qu'on peut fabriquer $|\mathrm{D}_{19}\backslash\mathscr{C}| = \frac{1}{18}(1260 + 9\cdot 12) = 76$ colliers distincts. Pour le cas général c.f. Le problème de Polyà.

Exercice 4.

Soit G un groupe fini. On se donne F un ensemble fini de couleurs et X un G-ensemble. Soit $\mathscr{C} = \mathscr{C}(X\,;F)$ l'ensemble des applications $X \to F$, justifier que $\mathscr{C}$ est naturellement muni d'une action à droite de G. Un coloriage est une orbite sous cette action. On veut calculer le nombre de coloriages de X sur F. On l'appliquera au cas où X est l'ensemble des faces d'un solide de Platon muni de l'action du sous-groupe des isométries du solide.

1. Montrer que le tétraèdre admet 5 coloriages des faces sur 2 couleurs. On donnera explicitement les 5 coloriages.
2. Montrer
$$|G\backslash\mathscr{C}| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} |F|^{|X/\langle g\rangle|}.$$
   Vérifier qu'on retrouve bien les 5 coloriages du tétraèdre au 1.
3. Calculer le nombre de coloriages des faces du cube sur 3 couleurs.

Correction exercice 4

1. Déjà, on a deux monochrome. Ensuite, dans le cas où on a un unique sommet d'une couleur distincte, un unique bleu ou un unique rouge, aucune différence, il n'y a qu'un seul coloriage possible : ce qui nous en fait 4. Finalement, reste à compter le cas où on a 2 faces de chaque couleur. Chaque face est adjacente aux 3 autres et on se rend compte qu'il n'y a qu'une seule possibilité. Plus coloré, soit
$$\gamma\colon \mathscr{C} \to \{X^4,\ X^3Y^1,\ X^2Y^2, X^1Y^3,\ Y^4\}$$
   donné pour $F\colon \{f_0,f_1,f_2,f_3\} \to \{X,Y\}$ par $F(f_0)F(f_1)F(f_2)F(f_3)$. Il suffit de traiter les cas où il y a deux couleurs. Mais on a vu que toute face est adjacente à une autre, donc en permutant les deux faces on peut supposer que $F(f_0)$ est rouge s'il y a un unique rouge ou $F(f_0)$ s'il y a un unique bleu. Ceci nous ramène au dernier cas où on a deux bleus et deux rouges. Encore une fois, dans ce cas, les deux bleus sont adjacents et les deux rouges aussi, on conclut en permutant.

   Sinon, remarquez que l'action de S_4 sur les faces est transitive.

[2]Le raisonnement n'est pas le même si l'angles est de la forme $2\pi k/3$.

2. Appliquons Burnside qui donne
$$|G\backslash\mathscr{C}| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\mathrm{Fix}(g\,;\mathscr{C})|,$$
ce qui nous ramène à déterminer $\mathrm{Fix}(g\,;\mathscr{C})$. Or, $f\colon X\to F$ est tel que $g\cdot f = f$ si pour tout $x\in X$, $f(g\cdot x) = f(x)$. Ainsi f est une fonction constante sur les *cycles* de $g\in G$ qui sont les parties de $\mathscr{C}$ de la forme $\{x, g\cdot x, g^2\cdot x,\ldots\}$. Une telle fonction est constante sur les orbites de $\langle g\rangle$ et donc définit une fonction $X/\langle g\rangle\to F$. Ainsi, on a construit une bijection
$$\mathrm{Fix}(g\,;\mathscr{C}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}\,(X/\langle g\rangle\,;\,F)$$
Mais $|\mathscr{C}\,(X/\langle g\rangle\,;\,F)| = |F|^{|X/\langle g\rangle|}$ ce qui permet de conclure.

3. Par ce qui précède on est ramené pour tout $g\in G$ à calculer le nombre d'orbites $\lambda(g) = |X/\langle g\rangle|$. Mais ici $G = \mathrm{S}_4$ qui agit sur les grandes diagonales du cube. L'action sur les faces du cube est donnée par l'un des deux plongements transitif $\mathfrak{S}_4\hookrightarrow\mathfrak{S}_6$ [3] qui sont échangés par l'isométrie indirecte. On remarque que $g\mapsto\lambda(g)$ ne dépend que de la classe de conjugaison de g, ainsi

   - Si $g = \mathrm{id}$, on a un unique élément et $\lambda(g) = 6$.
   - Si $g = (1\,2)$, une transposition, on a 6 conjugués et $\lambda(g) = 3$.
   - Si $g = (1\,2\,3)$, un 3-cycle, on a 8 conjugués et $\lambda(g) = 2$.
   - Si $g = (1\,2)(3\,4)$, une double transposition, on a 3 conjugués et $\lambda(g) = 4$.
   - Si $g = (1\,2\,3\,4)$, un 4-cycle, on a 6 conjugués et $\lambda(g) = 3$.

   Finalement, le nombre de coloriages est
$$\frac{1}{24}\left(3^6 + 6\cdot 3^3 + 8\cdot 3^2 + 3\cdot 3^4 + 6\cdot 3^3\right) = 57$$

Exercice 5.

Soit H_8 le groupe d'ordre 8 des quaternions, calculer $\mathrm{Aut}(\mathrm{H}_8)$.

Correction exercice 5

On va montrer $\mathrm{Aut}(\mathrm{H}_8)\cong\mathrm{S}_4$ en utilisant les isométries du cube. On sait que $\mathrm{H}_8/\langle\pm 1\rangle\cong(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ dont les automorphismes sont $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et donc on obtient une application surjective $\mathrm{Aut}(H_8)\to\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\hookrightarrow\mathrm{Aut}(\mathrm{H}_8)$. De plus, on a les automorphismes intérieurs donnés par $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2\hookrightarrow\mathrm{Aut}(H_8)$ qui est un sous-groupe distingué et donc
$$1\to(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2\to\mathrm{Aut}(\mathrm{H}_8)\to\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\to 1.$$
Mais cette suite est scindée par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\xrightarrow{\mathrm{id}}\mathrm{Aut}(\mathrm{H}_8)$, on reconnait bien S_4.

[3] C'est un bon exercice : S_{n+2} contient exactement deux sous-groupes transitifs isomorphes à S_n