École Normale Supérieure, Année 2021-2022

1e année, Algèbre 1

TD n° 1 : Notes et corrections

Cette petite note a pour but d'éclaircir un point discuté en TD par rapport au cours et compléter les exercices que nous n'aurons pas le temps de corriger ensemble. On commence par éclairer une potentielle source de confusion.

1 Erratum sur l'ensemble quotient

Dans le cours, pour une ensemble X muni d'une relation d'équivalence R, la définition de *l'ensemble quotient* X/R est bien l'ensemble des R-classes d'équivalence. On a naturellement une surjection $\pi_{\mathrm{R}} \colon E \to E/\mathrm{R}$, appelée *l'application quotient* et qui est donnée par $x \mapsto [x]$ où on a noté $[x]$ *la classe d'équivalence de* x. L'ensemble quotient ne doit pas être confondu avec la classe des *solutions d'un problème universel*, dont vous pouvez oublier l'existence et qui n'est pas adapté au cours d'algèbre.

Je détaille un peu, si jamais vous voulez comprendre la différence et l'idée que j'ai voulu faire passer en revenant sur le premier exercice. La dernière question, qui reformule la proposition 2.1 du cours, fait intervenir la définition suivante :

Définition 1.1. Soit X un ensemble fixé et R une relation d'équivalence sur X. À tout ensemble B on associe l'ensemble

$$\mathscr{C}_{\mathrm{R}}(X;B) \coloneqq \{f \colon X \to B \mid \forall x, y \in X,\, x\mathrm{R}y \implies f(x) = f(y)\} \subset \mathscr{C}(X,B)$$

où $\mathscr{C}(X,B)$ est l'ensemble des applications de X dans B. On dit qu'un couple (Y, π_Y) où Y est un ensemble muni d'une application $\pi_Y \colon X \to Y$ est une *Solution du problème universel du quotient de* X *par* R si pour tout ensemble B, l'application π_Y définit une bijection

$$\mathscr{C}(Y;B) \xrightarrow[f \longmapsto f \circ \pi_Y]{\sim} \mathscr{C}_{\mathrm{R}}(X;B).$$

L'exercice 1.4 dit alors que le couple $(X/R, \pi_{\mathrm{R}})$ défini dans le cours est une solution du problème universel du quotient de X par R. Ce que j'ai maladroitement voulu expliquer pendant le TD est qu'il n'y a pas une unique solution à ce problème universel mais bien une unique solution *à unique isomorphisme près*. Cependant, le couple $(X/\mathrm{R}, \pi_{\mathrm{R}})$ est un représentant de la classe des solutions au problème universel et c'est même le représentant qu'on choisira systématiquement sans que cela ne pose aucun problème. La petite remarque de la feuille insiste que ce point de vu peut être pertinent et qu'il y a des contextes, en dehors de la théorie des ensembles, où le choix de ce représentant peut être gênant. Il ne l'est pas dans le cours et ne le sera surement pas jusqu'à la fin de votre scolarité : donc si ça ne vous parle pas, ce n'est pas grave.

Je corrige les deux premiers exercices pour adapter ma correction en accord avec le cours.

Exercice 1. Échauffement

1. Soit E un ensemble. Décrire le quotient de E par la relation d'équivalence "égalité". Décrire le quotient de E par la relation d'équivalence $E \times E$.

2. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Montrer que la relation de congruence modulo n est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$ puis décrire le quotient de $\mathbb{Z}$ par cette relation.

3. Soit $\mathscr{V}_k$ "l'ensemble" des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps k. Soit R la relation d'isomorphisme de k-espaces vectoriels. Montrer que c'est une relation d'équivalence puis décrire le quotient $\mathscr{V}_k/\mathrm{R}$.

4. Soit X un ensemble fixé et R une relation d'équivalence sur X. À tout ensemble B on associe l'ensemble

$$\mathscr{C}_{\mathrm{R}}(X;B) \coloneqq \{f \colon X \to B \mid \forall x, y \in X,\, x\mathrm{R}y \implies f(x) = f(y)\} \subset \mathscr{C}(X,B)$$

où $\mathscr{C}(X,B)$ est l'ensemble des applications de X dans B. Montrer que l'application quotient $\pi_{\mathrm{R}}\colon X \to X/\mathrm{R}$ définit, pour tout ensemble B, une bijection

$$\mathscr{C}(X/\mathrm{R};B) \xrightarrow[f\longmapsto f\circ\pi]{\sim} \mathscr{C}_{\mathrm{R}}(X;B),$$

puis expliciter, le plus formellement possible, dans quelle mesure le couple $(X/\mathrm{R},\pi)$ est déterminé par cette propriété.

Correction exercice 1

1. Pour la relation d'égalité, les classes d'équivalence sont des singletons et l'ensemble quotient est $\{\{x\}; x\in E\}$ en bijection avec E par l'application quotient qui s'écrit $x\mapsto\{x\}$. Pour la relation $E\times E$ un élément de E est en relation avec tous les éléments de E donc il y a une unique classe d'équivalence dans E qui est l'ensemble tout entier : l'ensemble quotient est le singleton $\{E\}$ et l'application quotient est constante $x\mapsto E$.

2. La relation s'écrit : $\forall x,y\in\mathbb{Z}, x\equiv y \mod n \iff n|(x-y)$ qui définit bien une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$. Soit $x\in\mathbb{Z}$, alors la classe d'équivalence de x est $[x]=\{x+kn; k\in\mathbb{Z}\}$ et on note $r(x)\in\{0,1,2,\dots,n-1\}$ le reste de la division euclidienne de x par n. On en déduit que l'ensemble quotient est $\{[0],[1],[2],\dots[n-1]\}$ et que l'application quotient $\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ s'écrit $x\mapsto[r(x)]$.

3. Effectivement, on n'est pas face à un ensemble et si on veut être prudent on peut poser $\mathbf{V}$ un k-espace vectoriel de dimension infini et redéfinir $\mathscr{V}_k$ comme l'ensemble de ses sous-espaces vectoriels sur k de dimension finie. La relation d'isomorphisme s'écrit, i.e. $\forall V_1,V_2\in\mathscr{V}_k,\ V_1\sim V_2 \iff \exists f\colon V_1\to V_2$, bijection k-linéaire et on note $\pi\colon\mathscr{V}_k\to\mathscr{V}_k/\mathrm{R}$ l'application quotient. Soit $d\colon\mathscr{V}_k\to\mathbb{N}$ l'application "dimension" définie par $d\colon V\mapsto\dim_k V$. Or on sait que tout espace vectoriel de dimension finie n est isomorphe à k^n et donc d est constante sur les classes d'équivalence. On en déduit par la propriété universelle qu'il existe une unique application $\bar d\colon\mathscr{V}_k/\sim\to\mathbb{N}$ telle que $d=\bar d\circ\pi_\sim$. L'application $\bar d$ est une bijection et si on pour tout $n\in\mathbb{N}$ on choisit $V_n\in\mathscr{V}_k$ de dimension n alors $\mathscr{V}_k/\sim=\{[V_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ et la bijection s'écrit $\bar d\colon n\mapsto[V_n]$.

4. On a vu que cette question est une traduction de la qualité du couple $(X/\mathrm{R},\pi_{\mathrm{R}})$ d'être une solution au problème universel du quotient de X par R. Comme expliqué, une solution du problème est déterminée à *unique* isomorphisme près i.e. pour toute solution au problème universel (Y,π_Y) il existe une unique bijection $f\colon X/\mathrm{R}\to Y$ telle que $\pi_Y=f\circ\pi_{\mathrm{R}}$. Ceci répond à la dernière partie de la question.

Exercice 2.

Soit E un ensemble et R une relation sur E.

1. Montrer qu'il existe une unique relation d'équivalence $\tilde{\mathrm{R}}$ contenant R et minimale pour l'inclusion. On pose $E/\mathrm{R}\coloneqq E/\tilde{\mathrm{R}}$.

2. Donner une description explicite de $\tilde{\mathrm{R}}$. En particulier, on décrira l'application $E\to E/\mathrm{R}$.

3. On munit $\mathbb{Z}$ de la relation R définie par : $x\mathrm{R}y \iff \exists p$ un nombre premier tel que $x=py$. Expliciter la surjection $\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/\mathrm{R}$.

4. Soit X un ensemble et $f\colon X\to X$ une bijection. Pour R définie par $x\mathrm{R}y \iff y=f(x)$, expliciter la surjection $X\to X/\mathrm{R}$.

□

Correction exercice 2

1. Soit $\mathrm{Eq}_{\mathrm{R}}(E)\coloneqq\{\mathrm{R}'\subset E\times E \mid \mathrm{R}\subset\mathrm{R}',\ \mathrm{R}' \text{ est une relation d'équivalence}\}$ l'ensemble des relations d'équivalence content R. On pose

$$\tilde{\mathrm{R}}\coloneqq\bigcap_{\mathrm{R}'\in\mathrm{Eq}_{\mathrm{R}}(E)}\mathrm{R}'\subset E\times E.$$

Alors $\tilde{\mathrm{R}}$ contient R et comme une intersection quelconque de relations d'équivalence est une relation d'équivalence on obtient bien que $\tilde{\mathrm{R}}$ est une relation d'équivalence contenant R et elle est même minimale par définition.

2. Avant de donner une description explicite, notez que l'ensemble quotient $E/\tilde{\mathrm{R}}$ muni de la surjection $E \to E/\tilde{\mathrm{R}}$ est solution du problème universel du quotient de E par R, ce qui a parfaitement un sens même si R n'est pas une relation d'équivalence. Posons $\mathrm{R_s}$ la relation obtenu en symétrisant R définie par $\forall x, y \in E,\ x\mathrm{R_s}y \iff (x\mathrm{R}y \vee y\mathrm{R}x \vee x = y)$. Posons alors $\mathrm{R_e}$ la relation définie sur E par

$$\forall x, y \in E,\ x\mathrm{R_e}y \iff \exists \underbrace{p_0, p_2, \dots p_n}_{\text{ensemble fini}} \in E\ , x\mathrm{R_s}p_0 \wedge p_0\mathrm{R_s}p_1 \wedge \cdots \wedge p_{n-1}\mathrm{R_s}p_n \wedge p_n\mathrm{R_s}y$$

On vérifie alors que c'est bien une relation d'équivalence et on peut remarquer que toute relation d'équivalence contenant R contient $\mathrm{R_s}$ par la réfléxivité et la symétrie puis contient $\mathrm{R_e}$ par la transitivité. Par la minimalité de $\tilde{\mathrm{R}}$ on obtient $\tilde{\mathrm{R}} = \mathrm{R}_e$.

3. On précise que les nombres premiers sont pour nous des entiers positifs ; on notera $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. On note $\mathrm{s}\colon \mathbb{Z} \to \{-1, 0, +1\} \subset \mathbb{Z}$ l'application "signe" étendue à zéro i.e. définie pour $x \in \mathbb{Z}$ par
$$\mathrm{s}(x) \coloneqq \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Alors rappelons que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ le théorème fondamental de l'arithmétique nous donne une unique suite croissante $p_0, p_1, \dots, p_r \in \mathcal{P}$ telle que $n = \mathrm{s}(n)p_0p_1 \cdots p_r$. Alors, pour tout entier $i \leqslant r$, $n_i\mathrm{R}n_{i+1}$ où $n_i \coloneqq \mathrm{s}(n)p_0p_2 \cdots p_i$. La description de $\tilde{\mathrm{R}}$ de la question précédente assure alors que $\mathrm{s}(n)\tilde{\mathrm{R}}n$ ou en d'autres termes que s est constante sur les classes de $\tilde{\mathrm{R}}$-équivalence. Par la propriété universelle de l'ensemble quotient on obtient une application $\bar{\mathrm{s}}\colon \mathbb{Z}/\mathrm{R} \to \{-1, 0, +1\}$ telle que $\mathrm{s} = \bar{\mathrm{s}} \circ \pi_{\mathrm{R}}$. Comme s est surjective, $\bar{\mathrm{s}}$ l'est aussi et les classes $[-1], [0], [1]$ sont distinctes puisque comme pour R, si $x\tilde{\mathrm{R}}y$ alors x et y sont soit nuls, soit de même signe. On conclut que $\mathbb{Z}/\mathrm{R} = \{[-1], [0], [1]\}$ et l'application $\bar{\mathrm{s}}$ est donnée par $[i] \mapsto i$.

4. C'est un exemple déjà très détaillé dans le cours (cf. Exemple 1.8). Pour tout $x \in X$, on pose l'application $\mathrm{O}_{f,x}\colon i \in \mathbb{Z} \mapsto f^i(x)$ qui est bien définie comme expliqué dans le cours. Alors pour $x \in X$ on définit l'orbite de x sous f par l'image $\langle x \rangle_f \coloneqq \mathrm{O}_{f,x}(\mathbb{Z})$ et pour $y \in X$ on a bien soit $\langle x \rangle_f = \langle y \rangle_f$ soit $\langle x \rangle_f \cap \langle y \rangle_f = \emptyset$. Finalement, on obtient bien à partir de la description de $\tilde{\mathrm{R}}$ que l'ensemble $\langle x \rangle_f$ est bien la classe de $\tilde{\mathrm{R}}$-équivalence de x i.e. que $X/\mathrm{R} = \{\langle x \rangle_f\}_{x \in X}$ et l'application quotient $X \to X/\mathrm{R}$ est donnée par $x \mapsto \langle x \rangle_f$.

□

2 Exercices à corriger

J'avais demandé de faire les exercices 5-13-14 mais je n'aurais pas le temps de vous faire la correction donc voici un corrigé. Je rappelle que les exercices 13-14 utilisent la plus-part des exercices précédents dans la feuille et il est intéressant de les faire pour s'approprier les énoncés des autres exercices, même si on ne les a pas fait avant.

Exercice 5. Théorème de Cantor-Schröder-Bernstein

On veut montrer que si A et B sont deux ensembles tels que $A \hookrightarrow B$ et $B \hookrightarrow A$, alors $A \sim B$.

1. Montrer que l'on peut supposer $A \subset B$ et qu'il existe une injection $i\colon B \to A$.
2. Montrer que les ensembles $i^n(B \setminus A)$, pour $n \geqslant 1$, sont deux-à-deux disjoints.
3. Posons l'application $j\colon A \to B$, définie pour $x \in A$ par
$$j(x) \coloneqq \begin{cases} i^{-1}(x) & \text{si } \exists n \geqslant 1,\ x \in i^n(B \setminus A), \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$
Montrer que j définit bien une bijection. (*la fonction j "monte l'escalier" comme sur la figure ci-dessous*)

Correction exercice 5

1. Soit A et B deux ensembles tels que $A \hookrightarrow B$ et $B \hookrightarrow A$. Soit $f\colon A \to B$ une application injective fixée, on pose $A' \coloneqq f(A) \subset B$ l'image de A . Alors f définit une bijection $A \xrightarrow{\sim} A'$ ce qui donne l'équivalence des propositions $A \hookrightarrow B \iff \exists A' \subset B, A \sim A'$. L'énoncé du théorème devient alors $A' \sim A \wedge B \hookrightarrow A' \implies A \sim B$ ce qui revient à montrer, comme $\sim$ est une relation d'équivalence, pour $A \subset B$, $B \hookrightarrow A \implies A \sim B$. On se donne une injection $i\colon B \to A$.

2. Montrons que les ensembles $i^n(B \setminus A)$ pour $n \in \mathbb{N}$ sont disjoints. Soit $n, m \in \mathbb{N}$, supposons qu'on ait $x \in i^n(B \setminus A) \cap i^m(B \setminus A)$. Quitte à les échanger, on suppose $n \leqslant m$. Alors il existe $y_n \in B \setminus A$ et $y_m \in B \setminus A$ uniques tels que $i^{m-n}(y_n) = y_m$. Or l'image de i est contenu dans A mais comme $i^{m-n}(y_n) = y_m \in B \setminus A$ on a que $m - n = 0$. Ainsi les ensembles $i^n(B \setminus A)$ pour $n \in \mathbb{N}$ sont disjoints deux à deux. On en déduit en posant pour tout entier $n \geqslant 1$, $A_n \coloneqq i^n(B \setminus A)$ puis $A_+ = \bigsqcup_{n \geqslant 1} A_n$ et $A_0 \coloneqq A \setminus A_+$ que la famille $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ définit une partition de A.

3. Commençons par une observation générale : pour un ensemble X muni d'une partition $\{X_i\}_{i \in I}$ on obtient pour tout ensemble Y une partition des applications $X \to Y$ par la bijection
$$\mathscr{C}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \bigsqcup_{i \in I} \mathscr{C}(X_i, Y),$$
obtenue à partir de la famille des restrictions $f \mapsto \left\{ f\big|_{X_i} \right\}_{i \in I}$.
On va utiliser ce fait pour expliquer que j est bien définie et construire un inverse. D'après la question précédente on a aussi la partition moins fine $\{A_0, A_+\}$ de A. On utilise l'observation pour définir l'inverse de i sur A^+, qui est l'unique application $i'\colon A^+ \to B$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $i'\big|_{A_n} = i^{-1}\colon A_n \to i^{n-1}(B \setminus A)$: ceci donne un sens à $i^{-1}\colon A_+ \to B$. L'observation justifie alors que l'application j est bien définie comme l'unique application $A \to B$ telle que $j\big|_{A_+} = i^{-1}$ et $j\big|_{A_0} = \mathrm{id}$. De même, on a une partition pour B indexé sur $\mathbb{N}$ et donnée par $B_0 \coloneqq A_0$, $B_1 \coloneqq B \setminus A$, pour tout entier $n \geqslant 2$, $B_n \coloneqq i^{-1}(A_n) = i^{n-1}(B \setminus A) = A_{n-1}$ et finalement $B_+ = \bigsqcup_{n \geqslant 1} B_n$ ce qui donne une partition $\{B_0, B_+\}$ de B. Posons $j'\colon B \to A$ définie par l'observation comme l'unique application $B \to A$ telle que $j'\big|_{B_+} = i$ et $j'\big|_{B_0} = \mathrm{id}$. On obtient alors formellement que j' est un inverse à gauche et à droite de j. Ainsi on a obtenu que $A \sim B$ et le théorème est démontré.

Exercice 13.

Soient V un espace vectoriel, $e = \{e_i\}_{i \in I}$ une famille génératrice de V, et $f = \{f_j\}_{j \in J}$ une base de V.

1. Pour $i \in I$, on écrit $e_i = \sum_{j \in J} x_j f_j$ et on pose $J_i = \{j \in J, x_j \neq 0\}$, qui est un ensemble fini. Montrer $J = \bigcup_{i \in I} J_i$.
2. En déduire $I \times \mathbb{N} \twoheadrightarrow J$, puis $J \hookrightarrow I$.
3. En déduire que si e et f sont des bases de V alors $I \sim J$.

Correction exercice 13

1. On a $\bigcup_{i \in I} J_i \subset J$ par définition, soit $j \in J$. Alors comme e est une famille génératrice il existe une famille $\{y_i\}_{i \in I}$ d'éléments de k presque tous nulles telle que $f_j = \sum_{i \in I} y_i e_i$ et donc $f_j = \sum_{i \in I} y_i \sum_{k \in J_i} x_k f_k$. Or comme la famille est libre il existe nécessairement $i \in I$ telle que $j \in J_i$ sinon on aurait une relation non-triviale entre éléments de la base f. Ainsi $J \subset \bigcup_{i \in I} J_i$ et on conclut que $J = \bigcup_{i \in I} J_i$.

2. Si I est fini c'est clair, supposons I infini. Soit pour tout $i \in I$, $f_i\colon \mathbb{N} \to J_i \subset J$ une surjection donnée. On en déduit une application $f\colon I \times \mathbb{N} \to J$ donnée par $(i, n) \mapsto f_i(n) \in J$. On sait que $\bigcup_{i \in I} f_i(\mathbb{N}) = J$ par la question précédente et donc $f(I \times \mathbb{N}) = J$ i.e. f est surjective et donc $I \times \mathbb{N} \twoheadrightarrow J$. Or on sait d'après l'exercice 10 que $I \times \mathbb{N} \sim I$ comme I est supposé infini donc on a $I \twoheadrightarrow J$ et d'après l'exercice 6 on conclue que $J \hookrightarrow I$.

3. Si e est une base comme f est en particulier une famille génératrice on peut appliquer la conclusion précédente en inversant les rôles de I et J et conclure que $I \hookrightarrow J$. Comme on a toujours $J \hookrightarrow I$ on peut conclure par le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein de l'exercice 5 que $J \sim I$.

Exercice 14.

Soient V un k-espace vectoriel et $e = \{e_i\}_{i \in I}$ une base de V. On suppose I infini.

1. Montrer $V \sim k \times I$.
2. En déduire que l'on a $V \sim I$ ou $V \sim k$.

Correction exercice 14

1. On a une application $k \times I \to V$ donnée par $(a, i) \mapsto ae_i \in V$. Cette application est presque injective et on peut considérer $k \times I \to V \times V$ donnée par $(a, i) \mapsto (ae_i, e_i) \in V \times V$ qui elle est injective pour obtenir $k \times I \hookrightarrow V$ puisque $V \times V \sim V$ d'après l'exercice 11.

   On veut maintenant montrer $V \hookrightarrow k \times I$ pour conclure par l'exercice 5. Soit $J \subset k \times I$ une partie finie, on notera $\mathrm{v}(J) \coloneqq \sum_{(a,i) \in J} ae_i \in V$ qui définit une application surjective $\mathscr{P}_{\text{fin}}(k \times I) \to V$ et donc $\mathscr{P}_{\text{fin}}(k \times I) \twoheadrightarrow V$. Or d'après l'exercice 12 on a $\mathscr{P}_{\text{fin}}(k \times I) \sim k \times I$ d'où $k \times I \twoheadrightarrow V$ et on obtient finalement $V \hookrightarrow k \times I$ par l'exercice 6. Ainsi on a bien $k \times I \sim V$ comme annoncé.

2. Supposons qu'il n'existe pas de bijection entre V et I et montrons $V \sim k$ ou plutôt d'après ce qui précède $k \times I \sim k$. D'après l'exercice 5, comme $I \hookrightarrow k \times I$, il n'existe pas d'injection de $k \times I$ dans I et ainsi il n'existe pas d'injection de k dans I. En effet, pour le dernier point, $k \hookrightarrow I \implies k \times I \hookrightarrow I \times I \implies k \times I \hookrightarrow I$ puisque $I \times I \sim I$ d'après l'exercice 11. Ainsi, d'après l'exercice 9 on a nécessairement $I \hookrightarrow k$ ce qui donne $k \times I \hookrightarrow k \times k$ puis finalement $k \times I \hookrightarrow k$ comme $k \times k \sim k$ d'après l'exercice 11. On a montré $k \times I \hookrightarrow k$ mais on sait aussi $k \hookrightarrow k \times I$ et on conclut avec l'exercice 5 que $k \sim k \times I$ i.e. $V \sim k$ ce qui conclut l'argument.