Algèbre 1, Problème n° I :

Groupes et q-Combinatoire

Arnaud Vanhaecke[0]

Dernière mise à jour : January 4, 2022

Ce problème porte sur la géométrie et la combinatoire d'espaces associés aux groupes matricielles. On rencontrera les grassmanniennes, les variétés de drapeaux, le cône nilpotent, qui sont des espaces (des variétés algébriques pour être précis) classifiant des sous-espaces d'un espace vectoriel donné. Dans le cadre des corps finis, on peut présenter de nombreuses idées au travers de dénombrements mais ses espaces sont fondamentaux dans l'étude des représentations des groupes linéaires (i.e. matricielles). Ces constructions ont des applications en théorie des nombres comme en physique théorique.

Notations

- On notera k un corps. On supposera que k est soit un corps fini de cardinal q, $k = \mathbb{F}_q$, soit que $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
- On notera $\mathfrak{S}(A)$ les bijections d'un ensemble A et en particulier $\mathfrak{S}_n$ désignera le groupe symétrique sur n éléments qui agit sur l'ensemble $\Delta_n \coloneqq \{1, \ldots, n\}$.
- On considèrera toujours k^n muni de sa base canonique notée $\{e_1, \ldots, e_n\}$.
- L'action $\sigma \mapsto [e_i \mapsto e_{\sigma^{-1}(i)}]$ de $\mathfrak{S}_n$ sur la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ définit une action de $\mathfrak{S}_n$ sur k^n et donc une application $w \colon \mathfrak{S}_n \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(k)$ donnée par $\sigma \mapsto w_\sigma = (\delta_{\sigma(i),j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ qui permet d'identifier $\mathfrak{S}_n$ à un sous groupe de $\mathrm{GL}_n(k)$.
- On définit les reflexions simples $S_n = \{s_1, \ldots s_{n-1}\} \subset \mathrm{GL}_n(k)$ $s_i = w_{(i,i+1)}$ pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n-1$.
- On notera $\mathrm{GL}_n(k)$ le groupe des matrices carrées inversibles de taille n, $\mathrm{B}_n(k) \subset \mathrm{GL}_n(k)$ le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures[1].
- On notera $\mathrm{T}_n(k)$ le groupe abélien des matrices diagonales et $\mathrm{diag} \colon (k^\times)^n \to \mathrm{T}_n(k)$. On considèrera aussi le groupe des *matrices monomiales* $\mathrm{M}_n(k)$ qui est le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(k)$ dont chaque ligne et chaque colonne contiens un unique coefficient non-nul.
- Pour $n, m, m' \geqslant 1$ trois entiers on notera $k(m\,; m')$ le k-espace vectoriel des matrices de taille $m \times m'$ et $\mathfrak{gl}_n(k)$ le k-espace vectoriel des matrices carrés que l'on munit de sa structure d'anneau usuelle. En particulier $k(1\,; m) = k^m$ et $k(m\,; 1) = (k^m)^*$ son dual.
- On notera $\mathfrak{b}_n(k) \subset \mathfrak{gl}_n(k)$ le sous espace des matrices triangulaires supérieures et $\mathfrak{n}_n(k) \subset \mathfrak{b}_n(k)$ le sous-k-espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures strictes (i.e. dont les coefficients diagonaux sont nuls).
- Le groupe $\mathrm{GL}_n(k)$ opère sur $\mathfrak{gl}_n(k)$ par conjugaison et on parlera de *l'action adjointe* $\mathrm{GL}_n(k) \to \mathrm{End}_k(\mathfrak{gl}_n(k))$
- Dans un espace vectoriel un *cône* est une partie stable par toute homothétie.

Exercice 1. [Le cône nilpotent en dimension 2]

On notera $\mathfrak{sl}_2(k) \coloneqq \{u \in \mathfrak{gl}_2(k) \mid \mathrm{tr}(u) = 0\} \subset \mathfrak{gl}_2(k)$ comme sous-espace vectoriel de dimension 3 sur k. On notera $\mathrm{Q} = -\det$ et on pose $\mathscr{N}_2(k) \coloneqq \{u \in \mathfrak{sl}_2(k) \mid \mathrm{Q}(u) = 0\}$.

1. Montrer que l'on peut choisir un isomorphisme linéaire $\mathfrak{sl}_2(k) \xrightarrow{\sim} k^3$ de sorte à ce que
$$\mathscr{N}_2(k) \cong \{(x, y, z) \in k^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}.$$
Montrer que $\mathbb{P}(\mathfrak{sl}_2(k)) \cong \mathbb{P}^2(k)$. On notera $\mathbb{P}(\mathscr{N}_2(k))$ l'image de $\mathscr{N}_2(k) \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{P}^2$.
2. Justifier que $\mathscr{N}_2(k)$ est le cône des endomorphismes nilpotents de trace nulle.
3. Montrer que $\mathscr{N}_2(k)$ est stable sous la restriction de l'action adjointe de $\mathrm{GL}_2(k)$ sur $\mathfrak{sl}_2(k)$ et constituée de deux orbites. En déduire un morphisme de groupe $\mathrm{PSL}_2(k) \to \mathrm{PGL}_3(k)$.

---

[0] *Page et contacts* : `http://www.math.ens.fr/~vanhaecke/tdalg2021/`, (tout commentaire est bienvenu.)

[1] Ce sont des notations standard pour les matrices triangulaires supérieures (B pour Borel) et diagonales (T pour tore).

4. Montrer $\mathrm{Card}(\mathscr{N}_2(\mathbb{F}_q)) = q^2$.

5. Montrer que le complémentaire du cône nilpotent est stable par l'action adjointe. On a une décomposition en deux parties disjointes $\mathfrak{sl}_2(k) \setminus \mathscr{N}_2(k) = \mathscr{D}^+(k) \sqcup \mathscr{D}^-(k)$.

$$\mathscr{D}^+(k) := \{u \in \mathfrak{sl}_2(k) \mid \mathrm{Q}(u) \in k^{\times,2}\},\ \mathscr{D}^-(k) := \{u \in \mathfrak{sl}_2(k) \mid\ \mathrm{Q}(u) \notin k^{\times,2}\}.$$

Montrer que $\mathscr{D}^+(k)$ est le sous-espace des matrices trigonalisables.

Les faits qui suivent ne sont rien de plus que des pistes. En particulier, il est intéressant de détailler les cas $k = \mathbb{F}_q, \mathbb{R}$. Elles méritent d'être plus détaillé et n'ont pour l'instant que vocation à faire réfléchir...

- On a une correspondance entre les points de $\mathbb{P}(\mathfrak{sl}_2(k))\setminus\{Q(u) = 0\}$, image de $\mathscr{D}^+(k)\sqcup\mathscr{D}^-(k)$ et les involutions de $\mathrm{PGL}_2(k)$. Les involutions commutent si et seulement si elles forment un triangles dit autopolaire.

- Dans le cas où $k = \mathbb{R}$, $\mathscr{D}^+(\mathbb{R})$ est connexe et $\mathscr{D}^-(\mathbb{R})$ est constitué de deux composantes connexes. L'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathscr{D}^+(k)\sqcup\mathscr{D}^-(k)$ est transitive et on en déduit un isomorphisme de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$-ensembles $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathrm{D}^-(\mathbb{R})$.

- Adapter la description précédente dans le cas où $k = \mathbb{F}_q$ et l'analogie repose sur les résidues quadratiques qui forment la moitié du corps. On peut montrer qu'on a $\frac{1}{24}q(q^2-1)$ sous-groupes de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$ isomorphes à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Pour $q = 7$, l'ensemble de ces sous groupes forment $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$ ce qui induit un isomorphisme $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_7) \xrightarrow{\sim} \mathrm{PGL}_3(\mathbb{F}_2)$

Notations

Soit $n \geqslant 1$ un entier et q une variable formelle[2], On introduit quelques notations pour la suite. Pour n un entier,

$$\boxed{(t\,;q)_n := \prod_{j=0}^{n-1}(1-q^j t),}$$

le *q-symbole de Pochhammer.* On définit le *q-analogue* d'un entier n par$[n]_q$ appelé le *q-analogue de l'entier n.*

$$\boxed{[n]_q := 1 + q + \cdots + q^{n-1} = \frac{q^n-1}{q-1} = \frac{(q\,;q)_n}{(q\,;q)_{n-1}(q\,;q)_1}.}$$

On définit de plus sa *q-factorielle* par

$$\boxed{[n]!_q := \prod_{m=1}^{n}[m]_q = \prod_{m=1}^{n}(1+q+\cdots+q^{m-1}) = \frac{1}{(q-1)^n}\prod_{m=1}^{n}(q^m-1) = \frac{(q\,;q)_n}{(1-q)^n}.}$$

Finalement, pour $m \geqslant 1$ un entier tel que $m \leqslant n$ le *q-coefficient binomial* m parmi n est définit par

$$\boxed{\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q := \frac{[n]!_q}{[m]!_q[n-m]!_q} = \frac{(q\,;q)_n}{(q\,;q)_m(q\,;q)_{n-m}} = \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-m+1}-1)}{(q^m-1)\cdots(q-1)}.}$$

Exercice 2. [Quelques dénombrements sur $\mathbb{F}_q$]

Pour se familiariser avec ces notations on ré-exprime brièvement des quantités déjà (plus ou moins) rencontrés. Ici, on fixe p un entier premier et on désignera par q une puissance de p i.e. $q = p^s$ avec $s \geqslant 1$ un entier.

1. Soit $\mathbb{P}^n(k)$ l'espace projective sur k qui est l'ensemble des droites vectorielles dans k^{n+1}. Montrer

$$\boxed{\mathrm{Card}(\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)) = [n+1]_q = \begin{bmatrix} n+1 \\ 1 \end{bmatrix}_q.}$$

2. Décrire, à conjugaison près, le stabilisateur d'un point de $\mathbb{P}^n(k)$ sous l'action de $\mathrm{PGL}_{n+1}(k)$. En déduire une interprétation géométrique des formules

$$\mathrm{Card}(\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{F}_q)) = [n+1]_q q^n(q-1)\,\mathrm{Card}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)) = [n+1]!_q q^{\frac{n(n+1)}{2}}(q-1)^{n+1}.$$

En déduire

$$\boxed{\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q) = (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}(q\,;q)_n = q^{n^2}(q^{-1}\,;q^{-1})_n.}$$

[2]On travaille en réalité dans le corps $\mathbb{Q}((q))$ des séries de Laurent formelles en la variable q.

3. Une droite projective est un sous-ensemble de $\mathbb{P}^n(k)$ défini par l'ensemble des droites vectorielles contenues dans un plan vectoriel de k^{n+1}. Montrer que $\mathrm{PGL}_{n+1}(k)$ opère transitivement sur l'ensemble des droites projectives de $\mathbb{P}^n(k)$. Décrire le stabilisateur d'une droite projective (à conjugaison près).

4. Montrer que $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$ contient

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix}_q = \frac{(q^{n+1}-1)(q^n-1)}{(q^2-1)(q-1)} = \frac{(q\,;q)_{n+1}}{(q\,;q)_2(q\,;q)_{n-1}}$$

droites projectives. Montrer que $[n]_q$ droites projectives passent par un point donné de $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$ qui est le même nombre que le cardinal d'une droite projective dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$.

Exercice 3. [Décomposition de Bruhat]

1. Montrer la *décomposition de Bruhat* : on a une partition de $\mathrm{GL}_n(k)$ indexée par $\mathfrak{S}_n$ donnée par

$$\boxed{\mathrm{GL}_n(k) = \bigsqcup_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{B}_n(k) w_\sigma \mathrm{B}_n(k).} \tag{0.1}$$

On pourra utiliser l'algorithme du pivot de Gauss pour montrer qu'à tout $g \in \mathrm{GL}_n(k)$ correspond un unique couple $(\sigma, \tilde{g}) \in \mathfrak{S}_n \times \mathrm{GL}_n(k)$ tel que

(a) $\tilde{g} \in g\mathrm{B}_n(k)$ et $\tilde{g}_{\sigma(j)j} = 1$

(b) Pour toute paire d'indices, $j \geqslant \sigma(i) \implies \tilde{g}_{ij} = 0$ i.e. les coefficients d'une ligne de $\tilde{g}$, à droite du pivot, sont nuls.

2. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, notons $\mathcal{F}(\sigma) := \{g \in w_\sigma \mathrm{B}_n(k) \mid g \text{ vérifie (a) et (b)}\}$ comme k-espace vectoriel. Définir un isomorphisme linéaire $\mathcal{F}(\sigma) \xrightarrow{\sim} k^{l(\sigma)}$ où $l(\sigma)$ est le nombre d'inversions de σ, soit

$$l(\sigma) := \mathrm{Card}\left(\{(i,j) \in \Delta_{n-1}^2 \mid i > j \implies \sigma(i) < \sigma(j)\}\right).$$

3. Montrer [3] que $l(\sigma)$ est le nombre minimal s d'entiers $i_1, \ldots i_s \in \Delta_{n-1}$ tel qu'on ait $\sigma = s_{i_1} \ldots s_{i_s}$ produit de transpositions simples.

Exercice 4. [BN-paires]

Les propriétés suivantes ne seront pas cruciales pour la suite mais constituent la description d'une BN-paire, pour $\mathrm{GL}_n(k)$. J. Tits définit une BN-paire pour un groupe abstrait G comme la données de sous-groupes, B et N qui engendrent G, et vérifiant des axiomes formelles suffisants pour obtenir une décomposition de type Bruhat. Ici, B est $\mathrm{B}_n(k)$ et N est $\mathrm{M}_n(k)$ le sous-groupe des matrices monomiales.

1. Montrer que $s\mathrm{B}_n(k)s \neq \mathrm{B}_n(k)$ pour tout $s \in S_n$.

2. Montrer que $\mathrm{M}_n(k)$ est le normalisateur de $\mathrm{T}_n(k)$ dans $\mathrm{GL}_n(k)$. En déduire une suite exacte scindée de groupe

$$1 \to \mathrm{T}_n(k) \to \mathrm{M}_n(k) \to \mathfrak{S}_n \to 1.$$

En déduire une description comme produit semi-direct $\mathrm{M}_n(k) \cong \mathfrak{S}_n \ltimes (k^\times)^n$.

3. Soit $s \in S_n$ et $a \in \mathrm{M}_n(k)$. Montrer

$$s\mathrm{B}_n(k)a \subset \mathrm{B}_n(k)sa\mathrm{B}_n(k) \cup \mathrm{B}_n(k)a\mathrm{B}_n(k).$$

4. Montrer

$$\mathrm{T}_n(k) = \bigcap_{a\in\mathrm{M}_n(k)} a\mathrm{B}_n(k)a^{-1}.$$

[3] Cette question n'est peut-être pas raisonnable et anecdotique pour la suite mais je suis curieux de voir votre approche ! Je pense qu'il est possible de s'en sortir...

Exercice 5. [Le Commutant d'une matrice]

Soit $u \in \mathfrak{gl}_n(k)$ une matrice carrée de taille n. Notons

$$\boxed{\mathrm{C}_n(u) \coloneqq \{v \in \mathfrak{gl}_n(k) \mid uv = vu\},}$$

le *commutant de u*. En d'autres termes $\mathrm{C}_n(u) = \mathrm{End}_{k[u]}(k^n)$. On veut calculer $\dim_k(\mathrm{C}_n(u))$.

1. Soit $u \in \mathfrak{gl}_n(k)$ tel que $u^2 = 0$ et $\dim_k \ker u = d$. Montrer $\dim_k(\mathrm{C}_n(u)) = d^2 + (n-d)^2$.
2. Montrer que k^n est un $k[u]$-module monogène si et seulement si $\mathrm{C}_n(u) = k[u]$, où $k[u] \coloneqq \{P(u)\,;\, P(X) \in k[X]\}$.
3. Décomposons $k^n = \bigoplus_{i=1}^s V_i(u)$ en $k[u]$-modules monogènes où $V_i(u) = k[u] \cdot v_i \subset k^n$ et notons $p_i \colon k^n \to V_i(u)$ les projecteurs correspondants. Montrer que l'application $u \mapsto \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} p_i u p_j$ définit un isomorphisme de k-espaces vectoriels
$$\mathrm{C}_n(u) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \mathrm{Hom}_{k[u]}(V_i(u), V_j(u)).$$
4. Supposons que u possède $s \geqslant 1$ facteurs invariants $\chi_1(t)|\dots|\chi_s(t)$ et notons $d_i = \deg \chi_i(t)$ pour tout indice i. Montrer
$$\dim_k(\mathrm{C}_n(u)) = \sum_{i=1}^{s} (2i-1) d_i.$$
5. Montrer que $d_1, \dots d_s$ définit une partition de n. Soit $d_1^*, \dots, d_{s'}^*$ la partition duale définie par $d_i^* \coloneqq \mathrm{Card}(\{j \in \mathbb{N} \mid j \leqslant s,\ d_j \geqslant i\})$. Montrer
$$\boxed{\dim_k(\mathrm{C}_n(u)) = \sum_{i=1}^{s'} {d_i^*}^2.}$$
6. Montrer que l'ensemble des matrices qui commutent à tous les éléments de $\mathrm{C}_n(u)$, appelé le *bi-commutant de la matrice* u, est précisément $k[u]$. En appliquant ce fait à une homothétie u, on retrouve que le centre de $\mathfrak{gl}_n(k)$ est donné par les homothéties !
7. Montrer que la codimension de $\mathrm{C}_n(u)$ dans $\mathfrak{gl}_n(k)$ est paire.

Définitions

Soit $n \geqslant 1$ un entier. On a $k^n = \bigoplus_{i=1}^n k \cdot e_i$ où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de k^n. Pour tout entier m tel que $1 \leqslant m \leqslant n$ notons $k_m = \bigoplus_{i=1}^m k \cdot e_i \cong k^m$ ce qui définit le *drapeau complet standard* $k_\bullet \colon 0 \subsetneq k_1 \subsetneq \cdots \subsetneq k_{n-1} \subsetneq k_n = k^n$. Dans la suite, on s'intéresse aux objets suivants :

- La *Grassmanienne*
$$\boxed{\mathrm{Gr}_m^n(k) \coloneqq \{V \subset k^n \mid \dim_k V = m\}},$$
l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension m, de k^n que l'on munit de l'action induite par $\mathrm{GL}_n(k)$ sur k^n.
- On note
$$\boxed{\mathrm{Fl}_n(k) \coloneqq \{v_\bullet \colon 0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_{n-1} \subsetneq k^n \mid \dim_k(V_m) = m,\ 1 \leqslant m \leqslant n-1\}\,,}$$
l'ensemble des *drapeaux complets* de k^n que l'on muni de l'action à gauche $\mathrm{GL}_n(k)$ sur k^n.
- Le *cône nilpotent*
$$\boxed{\mathscr{N}_n(k) \coloneqq \{u \in \mathfrak{gl}_n(k) \mid u^n = 0\},}$$
l'ensemble des matrices nilpotentes de taille $n \times n$ à coefficients dans k. C'est un $\mathrm{GL}_n(k)$-ensemble pour l'action par conjugaison.

Exercice 6. [Dévisage d'un parabolique maximal]

Soit $m, n \geqslant 2$ deux entiers tels que $n \geqslant m$ et $m' \coloneqq n - m$.

1. Montrer que l'action de $\mathrm{GL}_n(k)$ sur $\mathrm{Gr}^n_m(k)$ est transitive.
2. Soit $\mathrm{P}^n_m(k)$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(k)$ décrit en terme de blocs par

$$\mathrm{P}^n_m(k) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{GL}_m(k) & k(m\,;m') \\ \hline 0 & \mathrm{GL}_{m'}(k) \end{array}\right)$$

ou plus formellement $\mathrm{P}^n_m(k) = \{g = (g_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathrm{GL}_n(k) \mid m+1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m \implies m, g_{i,j} = 0\}$. Montrer qu'on a un isomorphisme de $\mathrm{GL}_n(k)$-ensembles $\mathrm{GL}_n(k)/\mathrm{P}^n_m(k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gr}^n_m(k)$.

3. Montrer que $\mathrm{P}^n_m(k)$ contient un sous-groupe distingué, isomorphe au groupe vectoriel [4] $k(m\,;m')$ des matrices rectangulaires de tailles $m \times m'$.
4. En déduire la suite exacte scindée

$$0 \to k(m\,;m') \to \mathrm{P}^n_m(k) \to \mathrm{GL}_m(k) \times \mathrm{GL}_{m'}(k) \to 0.$$

5. Conclure la description en termes de produit semi-direct $\mathrm{P}^n_m(k) \xrightarrow{\sim} k(m\,;m') \rtimes_\phi (\mathrm{GL}_m(k) \times \mathrm{GL}_{m'}(k))$ où $\phi\colon \mathrm{GL}_m(k) \times \mathrm{GL}_{m'}(k) \to \mathrm{Aut}(k(m\,;m'))$ est défini pour $v \in k(m\,;m')$ par $\phi(g,h)\cdot v \coloneqq g^{-1}\cdot v \cdot h$.
6. Déterminer une bijection $\mathrm{Gr}^n_m(k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gr}^n_{n-m}(k)$. Remarquez qu'elle n'est pas canonique.

Exercice 7. [Décomposition en types]

Dans cet exercice on veut donner une décomposition de la grassmanienne en espaces affines (on dit parfois en *cellules*) en utilisant la décomposition de Bruhat. On notera

$$\check{\mathfrak{p}}(n\,;m) \coloneqq \{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \mid 1 \leqslant \alpha_1 < \cdots < \alpha_m \leqslant n\}$$

l'ensemble des m-combinaisons de Δ_n. On associe à une combinaison son *poids* donné pour tout $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \check{\mathfrak{p}}(n; m)$ par $\|\alpha\| \coloneqq \sum_{i=1}^m (\alpha_i - i) \in \mathbb{N}$.

1. Soit $V \subset k^n$ un sous-espace de dimension m. On définit

$$\alpha(V) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \text{ où } \alpha_i \coloneqq \min\{j \mid \dim_k(k_j \cap V) = i\} \in \mathbb{N},$$

. appelée le *type* de V. Montrer qu'on a ainsi défini une m-combinaison de Δ_n i.e. $\alpha(V) \in \check{\mathfrak{p}}(n; m)$. .

2. En déduire une application $\alpha\colon \mathrm{Gr}^n_m(k) \to \check{\mathfrak{p}}(n\,;m)$, constante sur les orbites sous l'action de $\mathrm{B}_n(k) \subset \mathrm{GL}_n(k)$.
3. En déduire que la partition en $\mathrm{B}_n(k)$-orbites s'écrit

$$\boxed{\bigsqcup_{\alpha \in \check{\mathfrak{p}}(n;m)} k^{\|\alpha\|} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gr}^n_m(k).}$$

Exercice 8. [Position relative et cellules de Schubert]

1. Montrer que l'action de $\mathrm{GL}_n(k)$ est transitive et que le drapeau complet standard $k_\bullet$ définit un isomorphisme de $\mathrm{GL}_n(k)$-ensembles $\mathrm{GL}_n(k)/\mathrm{B}_n(k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fl}_n(k)$.
2. Par la décomposition de Bruhat, montrer que les orbites de l'action diagonale de $\mathrm{GL}_n(k)$ sur $\mathrm{Fl}_n(k) \times \mathrm{Fl}_n(k)$ contient un unique élément de la forme $(\mathrm{B}_n(k), g\mathrm{B}_n(k))$ pour $g \in \mathrm{GL}_n(k)$. En déduire une application canonique

$$\mathrm{inv}\colon \mathrm{Fl}_n(k) \times \mathrm{Fl}_n(k) \to \mathfrak{S}_n.$$

constante sur les orbites de cette dernière action. On appelle $\mathrm{inv}(v_\bullet, v'_\bullet)$ la *position relative* des deux drapeaux complets $v_\bullet$ et $v'_\bullet$.

[4] Un *groupe vectoriel* est le groupe additif sous-jacent d'un espace vectoriel.

3. Montrer que la décomposition en $\mathrm{B}_n(k)$-orbites est de la forme
$$\mathrm{Fl}_n = \bigsqcup_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{Fl}_n^{\sigma}(k),$$
où $\mathrm{Fl}_n^{\sigma}(k) \coloneqq \{v_\bullet \in \mathrm{Fl}_n(k) \mid \mathrm{inv}(v_\bullet, k_\bullet) = \sigma\} = \mathrm{B}_n(k)\cdot w_\sigma \cdot k_\bullet$ est appelé une *cellule de Schubert.*

4. À l'aide de la réduction de l'exercice 4, donner une bijection linéaire $\mathrm{Fl}_n^{\sigma}(k) \xrightarrow{\sim} k^{l(\sigma)}$.

5. Soit
$$\pi \coloneqq (\pi_{1,n}, \dots, \pi_{n,1})\colon \mathrm{Fl}_n(k) \to \prod_{m=1}^{n} \mathrm{Gr}_m^n(k)$$
l'application qui associe à un drapeau complet la suite des n sous espaces de k^n, vus comme des éléments de la Grassmannienne. Montrer que π est un isomorphisme de $\mathrm{GL}_n(k)$-ensembles.

Exercice 9. [Binôme quantique]

1. Soit $q = p^s$ pour p un entier premier et $s \geqslant 1$. Montrer
$$\boxed{\mathrm{Card}(\mathrm{Fl}_n(\mathbb{F}_q)) = [n]!_q} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{Card}(\mathrm{Gr}_m^n(\mathbb{F}_q)) = \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q .}$$

2. Utiliser l'interprétation précédente pour montrer
$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q = \sum_{\lambda\in\check{\mathfrak{p}}(n\,;m)} q^{\|\lambda\|}.$$
Montrer que cette formule à un sens comme égalité de fonctions en une variable complexe q.

3. En déduire la *q-formule de Pascal*
$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix}_q + q^{n-m}\begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix}_q .$$

4. Montrer la formule du *binôme quantique*,
$$\boxed{\prod_{i=0}^{n-1}(1+q^i t) = \sum_{m=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q q^{\frac{m(m-1)}{2}} t^m .}$$
Montrer que cette formule est vraie pour $q \in \mathbb{C}$ un complexe.

Exercice 10. [Résolution du cône des matrices nilpotentes]

On définit la *résolution de Springer* comme l'ensemble
$$\boxed{\widetilde{\mathscr{N}_n}(k) \coloneqq \{(u, v_\bullet) \in \mathscr{N}_n(k)\times \mathrm{Fl}_n(k) \mid \forall i \geqslant 1,\ u\cdot V_i \subset V_i\}\,.}$$
Cet ensemble est muni d'une action de $\mathrm{GL}_n(k)$ définie par : $g\cdot(u, v_\bullet) = (gug^{-1}, g\cdot v_\bullet)$. On considère les deux projections
$$\begin{tikzcd} & \widetilde{\mathscr{N}_n}(k) \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\mu"] & \\ \mathscr{N}_n(k) & & \mathrm{Fl}_n(k). \end{tikzcd}$$

1. Montrer que π et μ sont $\mathrm{GL}_n(k)$-équivariantes. Montrer que pour tout $u \in \mathscr{N}_m(k)$, $\mathrm{Card}(\pi^{-1}(u)) = 1$ si et seulement si k^n est un $k[u]$-module monogène. On dit alors que u est *régulier.*

2. Posons l'application $\mathrm{GL}_n(k)\times\mathfrak{n}_n(k) \xrightarrow{\phi} \widetilde{\mathscr{N}_n}(k)$ définie par $\phi(g,b) \mapsto (gbg^{-1}, g\cdot k_\bullet) = g\cdot(b, k_\bullet)$. Montrer qu'elle est invariante pour l'action de $\mathrm{B}_n(k)$ à droite et définit, pour l'action à gauche, un isomorphisme de $\mathrm{GL}_n(k)$-ensembles
$$(\mathrm{GL}_n(k)\times\mathfrak{n}_n(k))/\mathrm{B}_n(k) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathscr{N}_n}(k).$$
On pourra remarquer que $\pi(\mu^{-1}(k_\bullet)) = \mathfrak{n}_n(k)$.

3. En déduire que $\mu^{-1}(v_\bullet)$ définit un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{gl}_n(k)$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.

Exercice 11. [Cône nilpotent sur $\mathbb{F}_q$]

Soit $n \geqslant 1$ un entier, notons $\mathscr{N}_n(\mathbb{F}_q)$ l'ensemble des matrices nilpotentes de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{F}_q$. On notera $\mathbf{n}(n,q)$ son cardinal. Le but de cette partie est de montrer

$$\boxed{\mathbf{n}(n,q) = q^{n(n-1)}.}$$

1. Montrer
$$\mathrm{Card}(\widetilde{\mathscr{N}_n}(\mathbb{F}_q)) = \sum_{u \in \mathscr{N}_n(\mathbb{F}_q)} \mathrm{Card}(\pi^{-1}(u)) = \sum_{v_\bullet \in \mathrm{Fl}_n(k)} \mathrm{Card}(\mu^{-1}(v_\bullet)).$$
En déduire $\mathrm{Card}(\widetilde{\mathscr{N}_n}(\mathbb{F}_q)) = q^{\frac{n(n-1)}{2}}[n]!_q$.
2. Montrer le *lemme de Fitting* : pour tout endomorphisme $u \in \mathfrak{gl}_n(k)$ il existe une décomposition $k^n = k^{n_0} \oplus k^{n_1}$ telle que $u = u_{\mathrm{nilp}} \oplus u_{\mathrm{inv}}$ où $u_{\mathrm{nilp}} \in \mathscr{N}_{n_0}(k)$ et $u_{\mathrm{inv}} \in \mathrm{GL}_{n_1}(k)$.
3. En déduire
$$\mathrm{Card}(\mathfrak{gl}_n(k)) = \sum_{s=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ s \end{bmatrix}_q q^{sn}(q^{-1}\,;q^{-1})_s \mathbf{n}(n-s,q).$$
4. Déduire du binôme quantique la formule
$$\sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m q^{\frac{m(m-1)}{2}}}{(q\,;q)_m} = \frac{(-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(q\,;q)_n}.$$
puis, finalement conclure que $\mathbf{n}(n,q) = q^{n(n-1)}$.
5. Pour toute partition $\lambda = \lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_s$ de n on pose
$$n_\lambda = q^{d(\lambda)} \prod_{i=0}^{s} \mathrm{Card}(\mathrm{GL}_{\lambda_i - \lambda_{i+1}}), \quad \text{avec } d(\lambda) = d(\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_s) \coloneqq \sum_{i=1}^{s} \left(\lambda_i^2 - (\lambda_i - \lambda_{i+1})^2\right).$$
À l'aide de la décomposition du commutant d'un endomorphisme nilpotent montrer
$$\mathbf{n}(n,q) = \mathrm{Card}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)) \sum_{\lambda \dashv n} \frac{1}{n_\lambda}.$$
où la somme porte sur toutes les partitions de l'entier n.
6. En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \neq 1$ on a la décomposition
$$\boxed{\frac{z^n}{(z\,;z)_n} = \sum_{\lambda \dashv n} \prod_{i=1}^{s(\lambda)} \frac{z^{-\lambda_i^2}}{(z^{-1}\,;z^{-1})_{\lambda_i - \lambda_{i+1}}}.}$$

Exercice 12. [Quelques identités d'Euler]

1. Soit $q \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |q| < 1$, Montrer la formule du *triple produit de Jacobi*,
$$\prod_{m=1}^{+\infty} (1-q^m)(1+q^m t^{-1})(1+q^{m-1}t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} q^{j(j-1)/2} t^j.$$
2. En déduire *l'identité des nombres pentagonaux d'Euler* : soit $q \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |q| < 1$, alors
$$\boxed{(q\,;q)_\infty = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (-1)^j q^{\frac{1}{2}j(3j-1)}.}$$
Un nombre pentagonal est un entier de la forme $p_j = \frac{1}{2}j(3j-1)$. Montrer que p_j pour $j \geqslant 1$ est le nombre de points sur un pentagone régulier dont chaque coté contient $j+1$ points (en comptant les sommets).

3. En notant $\mathrm{p}(n)$ l'ensemble des partitions de l'entier n, commencer par montrer l'identité

$$\frac{1}{(q\,;q)_\infty} = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{p}(n) q^n.$$

En déduire une nouvelle démonstration de l'identité des nombres pentagonaux d'Euler ; on pourra commencer par formaliser qu'un entier n est pentagonal si et seulement si n n'admet pas autant de partitions de longueur paire que de partitions de longueur impaire.

4. Soit $q \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |q| < 1$ Montrer la formule du *quintuple produit de Watson*,

$$\prod_{m=1}^{+\infty}(1-q^m)(1+q^m t^{-1})(1+q^{m-1}t)(1-q^{2m-1}t^{-2})(1-q^{2m-1}t^2) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} q^{j(3j-1)/2}(t^{3j}-t^{3j+1}).$$