Algèbre 1, Problème n° 2 :

Polynômes chromatiques et le problème de Polyà

Arnaud Vanhaecke[0]

Dernière mise à jour : December 30, 2021

Le but de ce problème est d'obtenir une formule générale pour calculer le nombre de coloriages G-invariants d'un ensemble fini muni de l'action d'un groupe G.

Notations

- On notera $\mathrm{Card}(X)$ le cardinal d'un ensemble fini X.
- On notera généralement X ou Y un ensemble fini muni de l'action d'un groupe G et K un ensemble fini de "couleurs" représenté par $\{1, \ldots, k\}$.
- On notera aussi $\mathscr{C}(X\,;\,K)$ l'ensemble des coloriages de X qui est muni d'une action à droite par G. On est intéressé dans ce problème par l'ensemble $G\backslash\mathscr{C}(X\,;\,K)$ qui représentent les *coloriages G-invariants de X*.
- On travaillera dans la $\mathbb{Q}$-algèbre des polynômes $\mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_n]$ muni du produit usuel (le produit de Cauchy).
- On notera $\mathfrak{S}(A)$ les bijections d'un ensemble A et en particulier $\mathfrak{S}_n$ désignera le groupe symétrique sur n éléments qui agit sur l'ensemble $\Delta_n \coloneqq \{1, \ldots, n\}$.
- On rappelle que les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$ correspondent naturellement aux partitions de l'entier n notés $\mathfrak{p}^n$ et on notera aussi $\mathfrak{p}^n_s = \{1 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_s \mid \sum_j \lambda_j = n\}$ l'ensemble des partitions de n sur s entiers. La notation $\lambda \dashv n$ signifie $\lambda \in \mathfrak{p}^n$. Pour tout $\lambda \dashv n$ on notera C_λ la classe de conjugaison correspondante et c_λ son cardinal.
- Pour G un groupe on notera $\mathrm{Conj}(G)$ l'ensemble des classes de conjugaison de G.
- Pour $g \in G$ un élément du groupe G, on notera $\langle g\rangle$ le sous-groupe monogène engendré par g.

Exercice 1. [Polynôme des cycles]

Soit X un ensemble fini muni de l'action d'un groupe G fini. Posons pour tout $g \in G$, $X_g \coloneqq X/\langle g\rangle$ l'ensemble des *cycles sous* g, c'est-à-dire des orbites de X sous l'action du groupe $\langle g\rangle$. On partitionne ensuite X_g suivant le cardinal des orbites :

$$X_g = \bigsqcup_{1\leqslant i\leqslant n} X_g^{(i)} \quad \text{où} \quad X_g^{(i)} \coloneqq \{\mathrm{O} \in X_g \mid \mathrm{Card}(\mathrm{O}) = i\}$$

et notons $t(g,i) = \mathrm{Card}(X_g^{(i)})$. Posons alors le monôme

$$\mathrm{Q}_g = \prod_{1\leqslant i\leqslant n} Y_i^{t(g,i)}$$

On définit le polynôme des cycles comme

$$\boxed{\mathcal{Q}_X^G(Y_1, \ldots, Y_n) \coloneqq \frac{1}{\mathrm{Card}(G)} \sum_{g\in G} \mathrm{Q}_g.}$$

1. Pour l'action de $\mathfrak{S}_3$ sur $\Delta_3 = \{1,2,3\}$ montrer $\mathcal{Q}_{\Delta_3}^{\mathfrak{S}_3} = \frac{1}{6}(Y_1^3 + 3Y_1Y_2 + 2Y_3)$
2. Montrer que $g \mapsto \mathrm{Q}_g$ est constant sur les classes de conjugaison de G. Pour $\lambda \in \mathrm{Conj}(G)$ on notera donc simplement Q_λ.
3. Montrer que $\mathcal{Q}_X^G = \mathcal{Q}_X^{G'}$ pour G' l'image du morphisme d'action de G dans $\mathfrak{S}_n$, où $n = \mathrm{Card}(X)$.

[0] *Page et contacts* : `http://www.math.ens.fr/~vanhaecke/tdalg2021/`, (tout commentaire est bienvenu.)

4. Pour l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $\Delta_n = \{1, \ldots, n\}$, montrer que le polynôme des cycles s'écrit comme somme sur les partitions de n
$$\mathcal{Q}_{\Delta_n}^{\mathfrak{S}_n}(Y_1, \cdots, Y_k) = \frac{1}{n!}\sum_{\lambda \dashv n} c_\lambda \cdot \mathrm{Q}_\lambda,$$
où $C_\lambda \subset \mathfrak{S}_n$ est la classe de conjugaison des éléments de type λ, et $c_\lambda \coloneqq \mathrm{Card}(\mathrm{C}_\lambda)$. On explicitera Q_λ.

5. Pour $G \subset \mathfrak{S}_n$ un sous-groupe, montrer que le polynôme des cycles est de la forme
$$\mathcal{Q}_{\Delta_n}^{G}(T_1, \cdots, T_k) = \frac{1}{\mathrm{Card}(G)}\sum_{\lambda \dashv n} c_\lambda^G \cdot \mathrm{Q}_\lambda$$
où $c_\lambda^G = \mathrm{Card}(C_\lambda \cap G)$.

Exercice 2. [Calcul de polynôme des cycles]

On se propose de déterminer quelques polynômes des cycles[1]

1. Calculer $\mathcal{Q}_\Delta^G$ pour G le groupe d'isométrie de l'un des 5 solides de Platon qui opère sur ces faces notés Δ.
   - Pour l'action de $G = \mathfrak{A}_4$ sur Δ les faces d'un tétraètre :
   $$\mathcal{Q}_\Delta^G = \frac{1}{12}(Y_1^4 + 8Y_1Y_3 + 3Y_2^2).$$
   - Pour l'action de $G = \mathfrak{S}_4$ sur Δ les faces d'un cube :
   $$\mathcal{Q}_\Delta^G = \frac{1}{24}(Y_1^6 + 6Y_1^2Y_4 + 3Y_1^2Y_2^2 + 6Y_2^3 + 8Y_3^2).$$
   - Pour l'action de $G = \mathfrak{S}_4$ sur Δ les faces d'un octaèdre :
   $$\mathcal{Q}_\Delta^G = \frac{1}{24}(Y_1^8 + 8Y_1^2Y_3^2 + 9Y_2^4 + 6Y_4^2).$$
   - Pour l'action de $G = \mathfrak{A}_5$ sur Δ les faces d'un dodécaèdre :
   $$\mathcal{Q}_\Delta^G = \frac{1}{60}(Y_1^{12} + 24Y_1^2Y_5^2 + 15Y_2^6 + 20Y_3^4).$$
   - Pour l'action de $G = \mathfrak{A}_5$ sur Δ les faces d'un icosaèdre :
   $$\mathcal{Q}_\Delta^G = \frac{1}{60}(Y_1^{20} + 20Y_1^2Y_3^6 + 15Y_2^{10} + 24Y_5^4).$$

2. On fait agir $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par translation sur lui même. Montrer
$$\mathcal{Q} = \frac{1}{n}\sum_{d|n}\varphi(d)Y_d^{n/d}.$$

3. On fait agir le groupe diédral D_{2n} sur un collier à n perles. Montrer que si n est impair
$$\mathcal{Q} = \frac{1}{2n}\left(\sum_{d|n}\varphi(d)Y_d^{n/d} + nY_1Y_2^{(n-1)/2}\right),$$
et si n est pair :
$$\mathcal{Q} = \frac{1}{2n}\left(\sum_{d|n}\varphi(d)Y_d^{n/d} + \frac{n}{2}Y_1^2Y_2^{(n-2)/2} + \frac{n}{2}Y_2^{n/2}\right).$$

4. Montrer que pour l'action de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{F}_2)$ sur le plan de Fano $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$ on a :
$$\mathcal{Q} = \frac{1}{168}\left(Y_1^7 + 56Y_1Y_3^2 + 48Y_7 + 21Y_1^3Y_2^2 + 42Y_1Y_2Y_4\right).$$

5. Montrer que pour l'action de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ on a :
$$\mathcal{Q} = \frac{1}{q(q-1)(q+1)}Y_1^{q+1} + \frac{1}{2(q-1)}\left(\sum_{\substack{d|(q-1)\\ d>1}}\varphi(d)Y_1^2Y_d^{(q-1)/d}\right) + \frac{1}{q}Y_1Y_p^{q/p} + \frac{1}{2(q+1)}\left(\sum_{\substack{d|(q+1)\\ d>1}}\varphi(d)Y_1^2Y_d^{(q+1)/d}\right).$$

[1] il n'est peut-être pas nécessaire de tous les faires...

Exercice 3. [Polynôme chromatique]

Soit X un ensemble fini de cardinal n muni d'une action de G. Soit K un ensemble fini, appelés les *couleurs*, de cardinal κ. Soit $\mathscr{C} = \mathscr{C}(X\,;K)$ l'ensemble des applications de X à valeur dans K. Alors $\mathscr{C}$ est muni d'une action à droite par G et à gauche par $\mathfrak{S}(K)$, définis par :

$$f \in \mathscr{C}, \quad f \star g \colon x \in X \longmapsto f(g \cdot x), \ , \ \sigma \cdot f \colon x \in X \longmapsto \sigma(f(x)).$$

Pour tout $f \in \mathscr{C}$ on définit le monôme dans $\mathcal{F}_K \coloneqq \mathbb{Q}[T_1, \ldots, T_k]$ par :

$$\gamma(f) = \prod_{k \in K} T_k^{f_k} \text{ où } f_k \coloneqq \operatorname{Card} f^{-1}(\{k\}).$$

1. Vérifier que $\gamma \colon \mathscr{C} \to \mathcal{F}_K$ défini par $\gamma \colon f \mapsto \gamma(f)$ passe au quotient et définit ce que l'on notera toujours $\gamma \colon G\backslash\mathscr{C} \to \mathcal{F}_K$.

On définit le *polynôme chromatique* par :

$$\boxed{\mathcal{Z}_X^G(T_1, \ldots, T_k) \coloneqq \sum_{f \in G\backslash\mathscr{C}} \gamma(f).}$$

2. Montrer que l'action de $\mathfrak{S}(K)$ sur $\mathscr{C}$ passe au quotient $G\backslash\mathscr{C}$.
3. Montrer que si on note Δ_3 l'ensemble des faces d'un tétraèdre régulier muni de l'action de $\mathfrak{A}_4$ et $K = \{1, 2\}$ alors

$$\mathcal{Z}_{\Delta_3}^{\mathfrak{A}_4}(X_1, X_2) = X_1^4 + X_1^3 X_2 + X_1^2 X_2^2 + X_1 X_2^3 + X_2^4.$$

Exercice 4. [Burnside pondéré]

Soit G un groupe fini et Y un ensemble fini muni d'une action de G, soit $\pi \colon Y \to Y/G$ l'application quotient. En adaptant la preuve de Burnside, montrer que pour toute fonction $f \colon Y/G \to A$ à valeur dans un groupe abélien A, on a :

$$\sum_{C \in Y/G} f(C) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{y \in \operatorname{Fix}(g\,;Y)} (f \circ \pi)(y),$$

où $\operatorname{Fix}(g\,;Y) \coloneqq \{y \in Y \mid g \cdot y = y\}$. On retrouve la formule de Burnside pour $f = 1$.

Exercice 5. [Théorème de Polyà]

Notons :

$$\Pi_k^{(m)} \coloneqq \sum_{i=1}^{k} T_i^m,$$

le *polynôme de Newton* d'ordre k et de degré m. Montrer le *théorème de Polyà* :

Théorème 0.1. *Soit G un groupe fini qui opère sur un ensemble fini X de cardinal $n \geqslant 1$. Soit K un ensemble fini de cardinal $k \geqslant 1$ de "couleurs". Alors*

$$\boxed{\mathcal{Z}_X^G(T_1, \ldots, T_k) = \mathcal{Q}_X^G(\Pi_k^{(1)}, \ldots, \Pi_k^{(n)}).}$$

Exercice 6. [Applications]

Pour $\lambda \in \mathfrak{p}_s^n$ une partition de n sur s entiers et k un entier , on notera

$$\Pi_k^\lambda(T_1, \ldots, T_k) \coloneqq \prod_{j=1}^{s} \Pi_k^{(\lambda_j)}.$$

Soit G un groupe fini qui opère fidèlement sur un ensemble fini X de cardinal $n \geqslant 1$. Soit K un ensemble fini de cardinal $k \geqslant 1$ de "couleurs".

1. Montrer que pour $G = \mathfrak{S}_n$ qui opère sur $X = \{1, \ldots, n\}$ et $K = \{1, \ldots, k\}$ les "couleurs", alors

$$\mathcal{Z}_X^G(T_1, \ldots, T_k) = \frac{1}{n!} \sum_{\lambda \dashv n} c_\lambda \cdot \Pi_k^\lambda.$$

On peut trouver cette égalité sans utiliser le théorème de Polyà.

2. Montrer qu'on peut numéroter X et K de sorte que :

$$\mathcal{Z}_X^G(T_1, \ldots, T_k) = \frac{1}{\mathrm{Card}(G)} \sum_{\lambda \dashv n} c_\lambda^G \cdot \Pi_k^\lambda.$$

3. On veut exprimer les polynômes de Newton dans une base où les coefficients des polynômes chromatiques donnent les coloriages G-invariants. On supposera dans la suite $k \geqslant n$. On introduit pour $\lambda \in \mathfrak{p}_k^n$ le *polynôme de Young* de λ sur k "couleurs" :

$$\mathrm{M}_k^\lambda := \sum_{1 \leqslant i_1 \ldots i_k \leqslant k} \prod_{j=1}^{r} X_{i_j}^{\mu_j}.$$

   (a) Montrer qu'il existe $\alpha_{\lambda,\mu} \in \mathbb{Z}$ pour tout $\lambda, \mu \in \mathfrak{p}^n$ tels que :

$$\Pi_k^\lambda = \sum_{\mu \dashv n} \alpha_{\lambda,\mu} \mathrm{M}_k^\mu.$$

   (b) Soit $\lambda \in \mathfrak{p}_s^n$ et $\mu \in \mathfrak{p}^n$, montrer :

$$\alpha_{\lambda,\mu} = \mathrm{Card}\left\{ f \colon \Delta_s \to \mathbb{N} \,\middle|\, \forall i = 1, \ldots, s,\ \lambda_i = \sum_{f(j)=i} \mu_j \right\}.$$

   (c) Pour une partition $\mu \in \mathfrak{p}_k^n$, notons κ_μ^G est le nombre de coloriages G invariant de X avec μ_i-couleurs i. Montrer :

$$\boxed{\mathcal{Z}_X^G(T_1, \ldots, T_k) = \sum_{\mu \in \mathfrak{p}_k^n} \kappa_\mu^G \cdot \mathrm{M}^\mu.}$$