Algèbre 1, Problème n° 4 :

Induction de représentations et applications

Arnaud Vanhaecke[0]

Dernière mise à jour : December 23, 2021

Ce problème traite de différent aspect d'une construction qui à une représentation d'un sous-groupe $H \subset G$ associe une représentation du groupe G tout entier. Cette construction s'apparente à une construction libre et se présente historiquement comme la première "Adjonction" découverte par Frobenius. Elle est donc aussi important conceptuellement qu'en pratique.

Notations 0.1.

- Toutes les représentations sont supposées à coefficients dans $\mathbb{C}$ et de dimension finie.
- Sauf mention contraire G sera est un groupe fini et H est un sous-groupe de G.
- On notera $\mathrm{Card}(X)$ le cardinal d'un ensemble fini X.
- On notera $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique sur n éléments et $\mathfrak{A}_n \subset \mathfrak{S}_n$ le sous-groupe alterné.

Exercice 1. [Restriction et induction]

Soit (W, σ) une représentation (complexe et de dimension fini) de H. On note

$$\mathrm{Ind}_H^G \sigma = \{f \colon G \to W \mid \forall h \in H,\ g \in G,\ f(hg) = \sigma(h) \cdot f(g)\}$$

en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel que l'on munit de l'action de G, donnée pour tout $g \in G$ par

$$g \cdot f \colon x \to f(xg).$$

1. Montrer que $\mathrm{Ind}_H^G \sigma$ muni de cette action définit une représentation de G. C'est la *représentation induite*.
2. Calculer la dimension de $\mathrm{Ind}_H^G \sigma$ en fonction de celle de W et de l'indice de H dans G. Expliciter une base de cet espace.
3. Déterminer $\mathrm{Ind}_{\{1\}}^G \chi_e$, où χ_e est la représentation triviale du groupe trivial.
4. Pour (V, ρ) une représentation de G on note $\mathrm{Res}_H^G \rho$ la *restriction à H* de V : c'est la restriction de la représentation ρ au sous-groupe H. Montrer que pour tout (V, ρ) représentation de G et (W, σ) représentation de H, on a une bijection *naturelle*
$$\mathrm{Hom}_G(\rho, \mathrm{Ind}_H^G \sigma) \cong \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Res}_H^G \rho, \sigma).$$
C'est la *réciprocité de Frobenius* qui dit que "l'induction est l'adjoint à droite de la restriction".
5. Montrer que pour tout (V, ρ) représentation de G et (W, σ) représentation de H, on a une bijection *naturelle*
$$\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_H^G \sigma, \rho) \cong \mathrm{Hom}_H(\sigma, \mathrm{Res}_H^G \rho).$$
Remarquer que contrairement au sens précédent, ce sens-là utilise fortement que G est un groupe fini.
6. Supposons que H est un sous-groupe distingué et soit (V, ρ) une représentation irréductible de G. Montrer l'alternative suivante
   - soit il existe un sous-groupe $K \subset G$ distinct de G contenant H et une représentation irréductible (W, σ) de K telle que $\rho = \mathrm{Ind}_K^G \sigma$,
   - soit $\mathrm{Res}_H^G \rho$ est isotypique, i.e. ses composantes irréductibles sont 2 à 2 isomorphes.

[0] *Page et contacts* : `http://www.math.ens.fr/~vanhaecke/tdalg2021/`, (tout commentaire est bienvenu.)

Exercice 2. [Sur le caractère d'une induite]

Soit (W, σ) une représentation (complexe et de dimension fini) de H sur V. Soit χ_W son caractère. On note $\mathbb{C}_c(G)$ l'espace vectoriel des fonctions centrales de G dans $\mathbb{C}$. On rappelle que cet espace est naturellement un espace de Hilbert de dimension fini, dont une base orthonormée est donnée par les caractères des représentations complexes irréductibles de dimension finie.

1. Montrer que la restriction définit une application linéaire $\mathrm{Res}_H^G \colon \mathbb{C}_c(G) \to \mathbb{C}_c(H)$.
2. Montrer que $\mathrm{Ind}_H^G \chi_\sigma$, le caractère de l'induite $\mathrm{Ind}_H^G \sigma$, est donné pour $g \in G$ par
$$\mathrm{Ind}_H^G \chi_\sigma(g) = \frac{1}{\mathrm{Card}(H)} \sum_{\substack{x \in G \\ x^{-1}gx \in H}} \chi_\sigma(x^{-1}gx).$$
En déduire une application linéaire $\mathrm{Ind}_H^G \colon \mathbb{C}_c(H) \to \mathbb{C}_c(G)$.
3. Soit $a \in \mathbb{C}_c(H)$ et $b \in \mathbb{C}_c(G)$, montrer que
$$\langle a, \mathrm{Res}_H^G b \rangle = \langle \mathrm{Ind}_H^G a, b \rangle.$$
Donner une démonstration directe et une par la théorie des représentations, en faisant appel à l'exercice précédent. C'est la *réciprocité de Frobenius numérique.*

Exercice 3. [Le critère de McKay]

On a remarqué que les induites ne sont pas toujours irréductibles. Le critère de McKay permet de savoir quand elle le sont, en terme de leurs caractères. On fixe K un sous-groupe de G.

1. Soit (W, σ) une représentation de H, expliquer pourquoi $\mathrm{Ind}_H^G \sigma$ est irréductible si et seulement si
$$\langle \chi_\sigma, \mathrm{Res}_H^G \mathrm{Ind}_H^G \chi_\sigma \rangle = \langle \mathrm{Res}_H^G \mathrm{Ind}_H^G \chi_\sigma, \chi_\sigma \rangle = 1.$$
2. Pour $g \in G$ on appelle la *double classe* sous (H, K) de g l'ensemble
$$HgK = \{hgk \ ; \ h \in H, \ k \in K\}.$$
Montrer que G est l'union disjointe des doubles classes sous (H, K). On note $H \backslash G / K$ l'ensemble des doubles classes sous (H, K).
3. On veut maintenant montrer la formule de McKay : Soit S un ensemble complet de représentant de $H \backslash G / K$. Pour $a \in \mathbb{C}_c(K)$ et $s \in S$ on note $a^s \colon x \to a(s^{-1}xs)$. On veut montrer que
$$\mathrm{Res}_H^G \mathrm{Ind}_K^G a = \sum_{s \in S} \mathrm{Ind}_{H \cap sKs^{-1}}^H \mathrm{Res}_{H \cap sKs^{-1}}^{sKs^{-1}} a^s$$
   (a) Montrer que la formule a bien un sens.
   (b) Soit $s \in S$ et V_s un ensemble de représentants des classes à gauche de $H \cap sKs^{-1}$ dans H. Montrer que
$$HsK = \bigsqcup_{v \in V_s} vsK.$$
   (c) Soit $s \in S$ et $T_s = \{vs \ ; \ v \in V_s\}$. Montrer que les T_s sont disjoints et que $T = \bigsqcup T_s$ est un ensemble de représentants des classes à gauche de K dans G.
   (d) Conclure.
4. En déduire le critère d'irréductibilité de McKay : La représentation $\mathrm{Ind}_H^G \sigma$ est irréductible si et seulement si
   - la représentation σ est irréductible,
   - les représentation $\mathrm{Res}_{H \cap sHs^{-1}}^H \sigma$ et $\mathrm{Res}_{H \cap sHs^{-1}}^{sHs^{-1}} \sigma^s$ sont disjointes (i.e. n'ont pas de constituants irréductibles communs) pour tout $s \notin H$, où σ^s est la représentation de sHs^{-1} donnée par $\sigma^s \colon x \to \sigma(s^{-1}xs)$.
5. Déduire de la preuve du critère qu'il suffit de vérifier la seconde condition pour s parcourant un ensemble de représentant des doubles classes $H \backslash G / H$.
6. Simplifier le critère si H est un sous-groupe distingué de G.

Exercice 4. [Représentations de Q_8]

Soit Q_8 le groupe fini des quaternions, qui est d'ordre 8.

1. Montrer que Q_8 admet 4 représentations distinctes de dimension 1.
2. Montrer que Q_8 admet une représentation irréductible de degré 2. Décrire la table des caractères de Q_8.
3. Montrer qe l'on peut réaliser la représentation irréductible de degré 2 comme l'induite de n'importe quel caractère d'ordre 4 de n'importe quel sous-groupe d'indice 2.

Exercice 5. [Représentations de certains produits semi-directs]

Soit A un groupe commutatif fini et H un groupe fini. Soit $G = A \rtimes H$ un produit semi-direct de A par H. Rappelons que dans ce cas A est distingué dans G.

1. Montrer que l'ensemble des représentations irréductibles de A forme un groupe isomorphe à $\hat{A} = \mathrm{Hom}(A, \mathbb{C}^*)$.
2. On pose pour tout $s \in H$ et $\chi \in \hat{A}$ la représentation χ^s donnée par $\chi^s \colon x \to \chi(s^{-1}xs)$. Montrer que ceci définit une action de H sur $\hat{A}$. On pose $\chi_1, \dots \chi_r$ des représentants des orbites de cette action.
3. Soit $H_i \subset H$ le stabilisateur de χ_i pour cette action. On pose $G_i = AH_i$. Soit ρ une représentation irréductible de H_i, montrer que ρ définit une représentation irréductible $\tilde{\rho}_i$ de G_i. En déduire que $\chi_i \otimes \tilde{\rho}_i$ définit une représentation irréductible de G_i.
4. Soit pour tout indice i et représentation irréductible ρ de H_i, la représentation $\theta_{i,\rho}$ de G donnée par
$$\theta_{i,\rho} = \mathrm{Ind}_{G_i}^{G}(\chi_i \otimes \tilde{\rho}_i).$$
Montrer que ces représentations sont irréductibles.
5. Montrer que $\theta_{i,\rho}$ détermine i et ρ. En déduire que $\theta_{i,\rho}$ et $\theta_{i',\rho'}$ sont isomorphes si et seulement si $i = i'$ et ρ est isomorphe à ρ'.
6. Montrer que toute représentation irréductible de G est de la forme $\theta_{i,\rho}$ pour un indice i et une représentation irréductible ρ de H_i. On pensera à utiliser la réciprocité de Frobenius.
7. Retrouver la classification des représentations irréductibles de D_n, le groupe diédral à $2n$ éléments pour $n \geqslant 1$ un entier.
8. Classifier les représentations irréductibles de $\mathfrak{A}_4$ puis de $\mathfrak{S}_4$.

Exercice 6. [Groupes d'ordre p^3]

Soit p un nombre premier. Le but de cet exercice est de classifier, à isomorphisme près, les groupes d'ordre p^3 et de décrire leurs représentations.

1. Rappeler la classification des groupes d'ordre p et p^2. Rappeler la classification des groupes d'ordre 8 et leurs représentations irréductibles. On supposera dans la suite que $p \neq 2$.
2. Déterminer les p-Sylow de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$.
3. En déduire qu'il existe un unique produit semi-direct non trivial $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Montrer que son centre est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
4. Classifier les représentations irréductibles du produit semi-direct non trivial $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
5. Soit G un groupe non abélien d'ordre p^3 contenant un élément d'ordre p^2. Montrer que G est l'unique produit semi-direct non trivial de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.
6. Classifier les représentations irréductibles du produit semi-direct non trivial $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
7. Conclure.

Exercice 7. [Représentations des groupes hyper-résolubles]

On dit qu'un groupe fini G est *hyper-résoluble* si il existe une suite

$$\{1\} = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_n = G$$

tel que pour tout indice $i \geqslant 1$ le sous-groupe $G_{i-1} \subset G$ soit distingué et le quotient G_i/G_{i-1} soit cyclique. Le but est de classifier les représentations de ces groupes.

1. Montrer qu'un groupe hyper-résoluble est résoluble et qu'un groupe nilpotent est hyper-résoluble.
2. Montrer que les groupes $\mathfrak{A}_4$ et $\mathfrak{S}_4$ sont résolubles mais pas hyper-résolubles. Montrer qu'il en est de même pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$.
3. Soit G un groupe hyper-résoluble non-commutatif. Montrer qu'il existe un sous-groupe commutatif distingué $H \subset G$ mais tel que H ne soit pas contenu dans le centre de G.
4. Montrer que les représentations irréductibles de G sont *monomiales*, i.e. de la forme $\mathrm{Ind}_H^G \chi$ pour H un sous-groupe de G et χ un caractère linéaire de H vu comme une représentation de degrée 1. On pensera à utiliser le dernier point du premier exercice.
5. Montrer qu'il existe des représentations irréductibles de groupes résolubles qui ne sont pas monomiales.