

# LES ISOMORPHISMES EXCEPTIONNELS ENTRE LES GROUPES CLASSIQUES FINIS

JEAN DIEUDONNÉ

**Introduction**<sup>1</sup>. Les groupes classiques de petite dimension présentent entre eux des isomorphismes que l'on peut qualifier de "génériques", c'est-à-dire que ces isomorphismes ne dépendent que de la dimension et du type de groupe considéré, et non du corps de base de l'espace vectoriel où opère le groupe. Ce sont les isomorphismes entre le groupe unimodulaire à deux variables  $SL_2(K)$ , le groupe symplectique  $Sp_2(K)$  et certains groupes unitaires  $U_2^+(K_1, f)$ , où  $K_1$  est une extension quadratique du corps commutatif  $K$ , et les isomorphismes entre les groupes orthogonaux à 3, 4, 5 ou 6 variables et certains groupes unimodulaires, unitaires ou symplectiques (voir (9) et (6)). Pour les groupes classiques *finis* (auxquels il faut ici ajouter les groupes symétriques et alternés), il y a en outre quelques isomorphismes exceptionnels, ne rentrant pas dans les types précédents, et connus depuis Jordan (7) et Dickson (2); on sait à présent qu'il ne peut y en avoir aucun autre (voir (8) pour les groupes unimodulaires et les groupes alternés, (4) pour les autres groupes). Les méthodes par lesquelles on a démontré jusqu'ici l'existence de ces isomorphismes reviennent à considérer les groupes étudiés comme des groupes abstraits, qu'on engendre (au moyen de calculs parfois pénibles) par des systèmes de générateurs et de relations entre ces générateurs, choisis de sorte que ces relations soient les mêmes pour les groupes dont on veut établir l'isomorphie. Ce faisant, on perd à peu près complètement de vue l'origine géométrique des groupes étudiés, et l'existence des isomorphismes que l'on obtient apparaît comme un pur hasard. Nous nous proposons, dans ce travail, de montrer qu'en restant plus près de la géométrie, on aboutit à des démonstrations au moins aussi simples et grâce auxquelles les résultats apparaissent comme un peu plus "naturels".

**1. Les groupes unimodulaires  $PSL_2(F_q)$  pour  $q = 2, 3, 4, 5$ .** Les transformations du groupe  $PSL_2(F_q)$  peuvent être considérées comme des transformations homographiques de la droite projective  $P_1(F_q)$ , permutant entre eux les  $q + 1$  points de cette droite. Si un de ces points est considéré comme point à l'infini, son complémentaire dans  $P_1(F_q)$  peut être identifié à l'espace vectoriel  $F_q$  (de dimension 1 sur le corps  $F_q$ ); si  $q = p^s$  ( $p$  premier), une translation quelconque dans  $F_q$  appartient à  $PSL_2(F_q)$ , laisse invariant le point à l'infini,

Reçu le 11 septembre, 1953.

<sup>1</sup>Nous suivons essentiellement, dans ce travail, la terminologie et les notations de (3), (4) et (5). Les évaluations des ordres des groupes classiques que nous utilisons sont empruntées à (2, p. 309).

et, considérée comme permutation des  $q$  points de  $F_q$ , elle se décompose en produit de  $p^{s-1}$  cycles de longueur  $p$ . Pour  $q = 2$ , on voit ainsi que  $PSL_2(F_2)$  contient toutes les transpositions des 3 points de  $P_1(F_2)$ , donc est identique au groupe symétrique  $\mathfrak{S}_3$ . Pour  $q = 3$ ,  $PSL_2(F_3)$  contient tous les cycles  $(a b c)$  du groupe  $\mathfrak{S}_4$ , donc contient le groupe alterné  $\mathfrak{A}_4$ , et comme il a le même ordre que  $\mathfrak{A}_4$ , il lui est identique. De même, pour  $q = 4$ ,  $PSL_2(F_4)$  contient toutes les permutations de la forme  $(a b)(c d)$  du groupe  $\mathfrak{A}_5$  et comme il a encore même ordre que ce dernier, il lui est identique.

La démonstration de l'isomorphie de  $PSL_2(F_5)$  et de  $\mathfrak{A}_5$  est un peu moins immédiate. On constate alors très aisément que l'on peut de 5 façons différentes grouper les 6 points de  $P_1(F_5)$  en trois couples  $(a, b)$ ,  $(c, d)$ ,  $(e, f)$  tels que chacun de ces couples soit formé de points *conjugués harmoniques* par rapport à *chacun* des deux autres couples (l'un des couples  $(a, b)$  peut être pris arbitrairement, et lorsqu'on fixe  $a$ , il y a 5 choix différents possibles pour  $b$ ). Il est clair que toute transformation de  $PSL_2(F_5)$  permute ces cinq groupements, d'où une représentation de  $PSL_2(F_5)$  dans  $\mathfrak{S}_5$ ; comme  $PSL_2(F_5)$  est simple, cette représentation est biunivoque, donc son image est un sous-groupe de  $\mathfrak{S}_5$  d'ordre égal à celui de  $PSL_2(F_5)$ , c'est-à-dire à 60; comme  $\mathfrak{A}_5$  est le seul sous-groupe de  $\mathfrak{S}_5$  d'indice 2, on a établi l'isomorphie de  $PSL_2(F_5)$  et de  $\mathfrak{A}_5$ .

**2. L'isomorphisme entre  $PSL_2(F_7)$  et  $PSL_3(F_2)$ .** On a  $GL_3(F_2) = SL_3(F_2)$  et le centre de ces deux groupes étant réduit à l'élément neutre,  $PSL_3(F_2)$  s'identifie à  $GL_3(F_2)$ . D'après le théorème fondamental de la géométrie projective, comme  $F_2$  n'admet que l'automorphisme identique, le groupe  $PSL_3(F_2)$  est aussi le groupe qui permute les 7 points du plan projectif  $P_2(F_2)$  en transformant les points alignés en points alignés (et par suite les droites concourantes en droites concourantes). Les *involutions* du groupe  $GL_3(F_2)$  sont les *transvections* (4, p. 13); chacune d'elles est entièrement déterminée par une droite du plan projectif  $P_2(F_2)$  et un point sur cette droite; il y a donc 21 involutions. En outre, deux transvections permutent si et seulement si le point de l'une est sur la droite de l'autre; d'où on conclut aussitôt qu'il y a au plus *trois* involutions de  $GL_3(F_2)$  qui peuvent permuter deux à deux, et qu'il y a 14 systèmes de telles involutions permutablement : 7 de ces systèmes correspondent aux droites de  $P_2(F_2)$  (chacun d'eux étant formé des trois transvections dont le point est sur cette droite); deux quelconques d'entre ces systèmes peuvent être transformés l'un dans l'autre par un automorphisme intérieur de  $GL_3(F_2)$ . Les 7 autres systèmes correspondent aux points de  $P_2(F_2)$  (chacun d'eux étant formé des trois transvections dont la droite passe par ce point); deux quelconques d'entre eux peuvent encore être transformés l'un dans l'autre par un automorphisme intérieur de  $GL_3(F_2)$ ; par contre un tel automorphisme ne peut transformer un tel système en un système du premier type.

Pour déterminer l'isomorphisme entre  $PSL_2(F_7)$  et  $PSL_3(F_2)$ , nous allons étudier les involutions de  $PSL_2(F_7)$ . Comme  $-1$  n'est pas un carré dans  $F_7$ , une involution de  $PSL_2(F_7)$  ne peut provenir que d'une involution de seconde

espèce de  $GL_2(F_7)$  (les seules involutions de première espèce de  $GL_2(F_7)$  ayant pour déterminant  $-1$ ); étant donné un vecteur  $a \neq 0$  du plan  $F_7^2$ , une telle involution  $u$  est entièrement déterminée par la donnée de  $b = u(a)$  pourvu que  $b$  ne soit pas collinéaire avec  $a$ ; en effet,  $a$  et  $b$  forment alors une base de  $F_7^2$ , et comme on doit avoir  $u(b) = -a$ ,  $u$  est bien déterminée. On notera d'ailleurs que  $u$  et  $-u$  donnent la même involution dans  $PSL_2(F_7)$ , si bien qu'en prenant une base  $(a, b)$  de  $F_7^2$ , on obtient toutes les involutions distinctes de  $PSL_2(F_7)$  en partant des involutions de seconde espèce  $u$  de  $GL_2(F_7)$  telles que  $u(a) = \lambda a + \mu b$ , où  $\lambda$  parcourt les éléments de  $F_7$ , que nous noterons  $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ , et où  $\mu$  prend seulement les valeurs  $1, 2, 3$ ; on trouve bien ainsi 21 involutions. Soit  $u_0$  celle de ces involutions telle que  $\lambda = 0, \mu = 1$  et cherchons les involutions  $u$  qui donneront dans  $PSL_2(F_7)$  une involution permutant avec celle qui provient de  $u_0$ : il faut et il suffit pour cela que  $u_0 u$  soit encore une involution de seconde espèce de  $GL_2(F_7)$ . On voit aussitôt que, par rapport à la base formée de  $a$  et de  $b = u_0(a)$ , la matrice de  $u$  est

$$\begin{pmatrix} \lambda & -\frac{1 + \lambda^2}{\mu} \\ \mu & -\lambda \end{pmatrix}$$

si  $u(a) = \lambda a + \mu b$ . En écrivant que la matrice de  $u_0 u$  est de la forme précédente, on obtient la condition  $\lambda^2 + \mu^2 + 1 = 0$ , ce qui donne les 4 involutions distinctes de  $PSL_2(F_7)$ , correspondant aux valeurs suivantes de  $\lambda$  et  $\mu$ :

$$\begin{aligned} \lambda &= \pm 3, & \mu &= 2; \\ \lambda &= \pm 2, & \mu &= 3. \end{aligned}$$

Si on cherche celles de ces quatre involutions qui commutent on constate que l'involution  $u'_1$ , correspondant au couple  $(3, 2)$ , permute avec  $u'_2$ , correspondant à  $(-2, 3)$ , et que  $u''_1$ , correspondant à  $(-3, 2)$ , permute avec  $u''_2$ , correspondant à  $(2, 3)$ ; il n'y a pas d'autre couple d'involutions permutable parmi ces quatre involutions.

Soit maintenant  $t$  une transvection de vecteur  $a$ , telle que  $t(a) = a, t(b) = b + a$ ; les puissances successives  $t, t^2, \dots, t^6$  sont toutes les transvections distinctes de vecteur  $a$ . Désignons par  $P_k$  ( $1 \leq k \leq 7$ ) le système des trois involutions deux à deux permutable

$$t^{k-1} u_0 t^{-k+1}, \quad t^{k-1} u'_1 t^{-k+1}, \quad t^{k-1} u'_2 t^{-k+1}$$

et par  $D_k$  ( $1 \leq k \leq 7$ ) le système des trois involutions deux à deux permutable

$$t^{k-1} u_0 t^{-k+1}, \quad t^{k-1} u''_1 t^{-k+1}, \quad t^{k-1} u''_2 t^{-k+1}.$$

Comme  $t^k u t^{-k}$  est l'involution qui transforme  $a$  en  $t^k(b)$ , on constate aisément que les 14 systèmes  $P_k, D_k$  contiennent les 21 involutions distinctes de  $PSL_2(F_7)$ . Deux  $P_k$  (resp.  $D_k$ ) d'indices distincts n'ont aucune involution en commun, et chaque involution de  $PSL_2(F_7)$  appartient à un seul  $P_i$  et un seul  $D_j$ . Si on dit

que deux systèmes sont *incidents* s'ils ont une involution en commun, on constate aisément que les relations d'incidence entre les  $P_i$  et les  $D_j$  sont exactement celles des 7 points et des 7 droites du plan projectif  $P_2(F_2)$ . Cela étant, une transformation  $s$  de  $PSL_2(F_7)$  permute les 21 involutions de  $PSL_2(F_7)$  (par l'automorphisme intérieur  $u \rightarrow sus^{-1}$ ), transforme évidemment un  $P_i$  (resp.  $D_j$ ) en un  $P_h$  ou un  $D_k$ , et conserve les "relations d'incidence". On en déduit une représentation  $\phi$  de  $PSL_2(F_7)$  dans le groupe  $\Gamma$  des permutations des 14 points et droites de  $P_2(F_2)$ , conservant les relations d'incidence. Mais le théorème fondamental de la géométrie projective montre que  $\Gamma$  est un groupe ayant comme sous-groupe distingué d'indice 2 le groupe  $PSL_3(F_2)$ , qui est lui-même simple;  $\Gamma$  n'a donc pas d'autre sous-groupe d'indice 2. D'autre part, comme  $PSL_2(F_7)$  est simple,  $\phi$  est un isomorphisme sur un sous-groupe de  $\Gamma$  qui, étant d'ordre égal à celui de  $PSL_2(F_7)$ , est nécessairement d'indice 2 dans  $\Gamma$ , donc identique à  $PSL_3(F_2)$ .

**3. L'isomorphisme entre  $PSL_2(F_9)$  et  $\mathfrak{A}_6$ .** Nous allons ici encore partir des involutions de  $PSL_2(F_9)$ . Comme  $-1$  est un carré dans  $F_9$  (nous désignerons par  $i$  un élément de  $F_9$  tel que  $i^2 = -1$ ), les involutions de  $PSL_2(F_9)$  proviennent des transformations  $u$  de  $SL_2(F_9)$  définies de la façon suivante: l'espace vectoriel  $F_9^2$  est décomposé en somme directe de deux droites  $D^+$  et  $D^-$ , et on a  $u(x) = ix$  dans  $D^+$ ,  $u(x) = -ix$  dans  $D^-$ . Il n'y a pas d'autre involution dans  $PSL_2(F_9)$ , car les involutions de première espèce de  $GL_2(F_9)$  ont pour déterminant  $-1$  et les autres involutions de seconde espèce ont un déterminant  $\neq 1$ . Une involution de  $PSL_2(F_9)$  est donc entièrement déterminée par un couple de points distincts de la droite projective  $P_1(F_9)$ , correspondant aux droites  $D^+$  et  $D^-$ ; nous identifierons  $P_1(F_9)$  avec la droite  $x = 1$  dans l'espace vectoriel  $F_9^2$ , complétée par le point à l'infini  $\infty$ .

Il est immédiat que pour que deux involutions de  $PSL_2(F_9)$  permutent, il faut et il suffit que les couples de points de  $P_1(F_9)$  qui leur correspondent soient conjugués harmoniques. On constate alors aussitôt que pour une involution donnée, il existe deux triplets d'involutions deux à deux permutable, contenant l'involution donnée. Si cette involution correspond au couple  $(0, \infty)$ , les deux triplets correspondent respectivement aux couples suivants:

$$\begin{aligned} T_1 &: (0, \infty), (1, -1), (i, -i), \\ T'_1 &: (0, \infty), (1+i, -1-i), (1-i, -1+i). \end{aligned}$$

On constate en outre qu'il existe une transformation de  $PGL_2(F_9)$  transformant les couples de  $T_1$  en les couples de  $T'_1$ , mais cette transformation (qui est l'homothétie de centre 0 et de rapport  $1+i$ ) n'appartient pas à  $PSL_2(F_9)$ . Cela étant, comme il existe toujours une transformation de  $PSL_2(F_9)$  envoyant un couple quelconque de points de la droite projective  $P_1(F_9)$  sur un autre, on voit que les 45 couples de points de  $P_1(F_9)$  se répartissent en 15 triplets transformés de  $T_1$ , tout couple appartenant à un triplet et un seul, la répartition étant la suivante:

$T_2 :$	$(1, \infty),$	$(-1, 0),$	$(1 + i, 1 - i)$
$T_3 :$	$(-1, \infty)$	$(0, 1),$	$(-1 + i, -1 - i)$
$T_4 :$	$(i, \infty),$	$(1 + i, -1 + i),$	$(-i, 0)$
$T_5 :$	$(-i, \infty),$	$(1 - i, -1 - i),$	$(0, i)$
$T_6 :$	$(1 + i, \infty)$	$(-1 + i, i),$	$(1 - i, 1)$
$T_7 :$	$(-1 - i, \infty)$	$(-i, 1 - i),$	$(-1, -1 + i)$
$T_8 :$	$(1 - i, \infty),$	$(-1 - i, -i),$	$(1, 1 + i)$
$T_9 :$	$(-1 + i, \infty),$	$(i, 1 + i),$	$(-1 - i, -1)$
$T_{10} :$	$(1, i),$	$(-1, -i),$	$(1 - i, -1 + i)$
$T_{11} :$	$(-1, -i),$	$(1, i),$	$(1 + i, -1 - i)$
$T_{12} :$	$(0, 1 + i),$	$(-1, 1 - i),$	$(-i, -1 + i)$
$T_{13} :$	$(0, -1 - i),$	$(1, -1 + i),$	$(i, 1 - i)$
$T_{14} :$	$(0, 1 - i),$	$(-1, 1 + i),$	$(i, -1 - i)$
$T_{15} :$	$(0, -1 + i),$	$(1, -1 - i),$	$(-i, 1 + i)$

(les triplets d'indices  $2k$  et  $2k + 1$  se déduisent l'un de l'autre par symétrie de centre 0).

En multipliant les points de chaque couple par  $1 + i$ , on obtient une autre répartition en 15 triplets  $T'_1, \dots, T'_{15}$ , transformés de  $T'_1$  par les transformations de  $PSL_2(F_9)$ . Remarquons maintenant que si, pour deux triplets  $T_i, T_j$ , il existe un couple de  $T_i$  qui permute avec un couple de  $T_j$ , ces deux couples appartiennent à un même triplet  $T'_k$ . On constate alors sans peine que le triplet  $T_1$  appartient à deux systèmes de triplets

$$\begin{matrix} T_1, & T_6, & T_7, & T_{14}, & T_{15} \\ T_1, & T_8, & T_9, & T_{12}, & T_{13} \end{matrix}$$

tels que deux couples appartenant à deux triplets distincts d'un même système ne correspondent jamais à deux involutions permutable; en outre, ces systèmes de 5 triplets sont maximaux pour la propriété précédente.

Cela étant, vu le fait que les triplets  $T_i$  sont permutés transitivement par  $PSL_2(F_9)$ , il existe 6 systèmes maximaux de 5 triplets  $T_i$  du type précédent, chaque triplet appartenant exactement à deux de ces systèmes.<sup>2</sup> Comme ces 6 systèmes sont évidemment permutés par  $PSL_2(F_9)$ , on voit qu'on obtient une représentation  $\phi$  de  $PSL_2(F_9)$  dans  $\mathfrak{S}_6$ . Comme  $PSL_2(F_9)$  est simple et de même ordre que  $\mathfrak{A}_6$ , et que  $\mathfrak{A}_6$  est le seul sous-groupe de  $\mathfrak{S}_6$  d'indice 2,  $\phi$  est un isomorphisme de  $PSL_2(F_9)$  sur  $\mathfrak{A}_6$ .

**4. L'isomorphisme entre  $PSL_4(F_2)$  et  $\mathfrak{A}_8$ .** Le groupe  $SL_4(F_2)$  étant égal à  $GL_4(F_2)$  et ayant un centre réduit à l'élément neutre, peut être identifié à  $PSL_4(F_2)$ . Nous allons étudier comment  $GL_4(F_2)$  permute les bivecteurs **(1)** sur l'espace  $E = F_2^4$ ; si  $(e_i)_{1 \leq i \leq 4}$  est une base de cet espace, les 64 bivecteurs sur  $E$  sont donnés par la formule

$$z = \epsilon_{12}e_1 \wedge e_2 + \epsilon_{13}e_1 \wedge e_3 + \epsilon_{14}e_1 \wedge e_4 + \epsilon_{23}e_2 \wedge e_3 + \epsilon_{24}e_2 \wedge e_4 + \epsilon_{34}e_3 \wedge e_4$$

<sup>2</sup>Ces systèmes apparaissent aussi dans les études sur le "groupe de Valentiner" formé de transformations projectives du plan projectif complexe, qui est isomorphe à  $\mathfrak{A}_6$  (voir **(10)**).

où chacun des  $\epsilon_{ij}$  prend l'une des valeurs 0, 1. Les bivecteurs de rang 4 sont ceux pour lesquels le pfaffien

$$(1) \quad \epsilon_{12}\epsilon_{34} + \epsilon_{13}\epsilon_{24} + \epsilon_{14}\epsilon_{23} = 1.$$

On voit aussitôt qu'il existe 28 de ces bivecteurs; d'ailleurs, comme chacun d'eux peut s'écrire sous la forme  $a \wedge b + c \wedge d$ , où  $(a, b, c, d)$  est une base de  $E$ , deux quelconques d'entre eux peuvent se transformer l'un dans l'autre par une transformation de  $GL_4(F_2)$ .

Considérons un des bivecteurs précédents, par exemple le bivecteur  $z_0$  dont toutes les composantes  $\epsilon_{ij} = 1$ , et proposons nous de chercher les systèmes *maximaux* de bivecteurs de rang 4, contenant  $z_0$ , et tels que pour deux bivecteurs quelconques de ce système, on ait  $z \wedge z' \neq 0$ , c'est-à-dire

$$(2) \quad \epsilon_{12}\epsilon'_{34} + \epsilon'_{12}\epsilon_{34} + \epsilon_{13}\epsilon'_{24} + \epsilon'_{13}\epsilon_{24} + \epsilon_{14}\epsilon'_{23} + \epsilon'_{14}\epsilon_{23} = 1.$$

En remplaçant  $z'$  par  $z_0$  dans cette relation, on voit que les bivecteurs  $z$  d'un des systèmes cherchés doivent être tels que  $\sum \epsilon_{ij} = 1$ ; compte tenu de (1), on voit que l'on doit avoir exactement trois  $\epsilon_{ij}$  égaux à 1, dont deux forment un couple "opposé", c'est-à-dire tel que les indices doubles  $(i, j)$  dans un tel couple n'aient pas d'indice simple commun (i.e., les couples  $(\epsilon_{12}, \epsilon_{34})$ ,  $(\epsilon_{13}, \epsilon_{24})$ ,  $(\epsilon_{14}, \epsilon_{23})$ ). Si alors on tient compte de (2), il est facile de vérifier qu'il y a exactement *deux* systèmes maximaux du type cherché contenant  $z_0$ , savoir le système formé de  $z_0$  et des 6 bivecteurs:

- (1, 1, 0, 0, 1, 0)
- (1, 1, 0, 0, 0, 1)
- (1, 0, 1, 1, 0, 0)
- (0, 1, 1, 1, 0, 0)
- (0, 0, 1, 0, 1, 1)
- (0, 0, 0, 1, 1, 1)

(où les coordonnées du bivecteur sont rangées dans l'ordre qu'ils ont dans la relation (1)), et le système formé de  $z_0$  et des 6 bivecteurs:

- (1, 1, 1, 0, 0, 0)
- (1, 1, 0, 1, 0, 0)
- (0, 0, 1, 1, 1, 0)
- (0, 0, 1, 1, 0, 1)
- (1, 0, 0, 0, 1, 1)
- (0, 1, 0, 0, 1, 1)

Comme les bivecteurs de rang 4 sont permutés transitivement par  $GL_4(F_2)$ , il existe 8 systèmes maximaux de 7 bivecteurs du type précédent, chaque bivecteur appartenant exactement à deux de ces systèmes. Comme ces 8 systèmes sont évidemment permutés par  $GL_4(F_2)$ , on obtient une représentation de  $GL_4(F_2)$  dans  $\mathfrak{S}_8$ . Comme au n°3, on en conclut que cette représentation est un isomorphisme de  $GL_4(F_2)$  sur  $\mathfrak{A}_8$ .

**5. L'isomorphisme entre  $Sp_4(F_2)$  et  $\mathfrak{S}_6$ .** Les résultats du §4 montrent aussitôt que le groupe symplectique  $Sp_4(F_2)$  est isomorphe à  $\mathfrak{S}_6$ . En effet,  $Sp_4(F_2)$  peut être considéré comme le sous-groupe de  $GL_4(F_2)$  laissant invariant un bivecteur  $z_0$  de rang 4; comme  $z_0$  est l'intersection de deux systèmes maximaux, les transformations de  $Sp_4(F_2)$  sont celles qui laissent invariants ces deux systèmes ou qui les échangent. Mais il est immédiat que le sous-groupe de  $\mathfrak{A}_8$  consistant en les permutations qui laissent fixes ou échangent deux des 8 objets permutés par  $\mathfrak{A}_8$  est isomorphe à  $\mathfrak{S}_6$ .

On peut obtenir le même résultat par un raisonnement plus "intrinsèque", dont nous nous bornerons à indiquer les grandes lignes. On voit aisément que chacun des 15 vecteurs  $\neq 0$  de  $F_2^4$  appartient à deux systèmes maximaux de 5 vecteurs dont deux quelconques ne sont pas conjugués pour la forme alternée  $(x, y)$  qui définit le groupe symplectique  $Sp_4(F_2)$ . Par exemple, si on prend une base symplectique  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  de  $F_2^4$  telle que  $(e_1, e_2) = 1, (e_3, e_4) = 1, (e_i, e_j) = 0$  pour les autres couples d'indices, on voit que les deux systèmes maximaux de 5 vecteurs qui contiennent  $e_1$  sont

$$e_1, \quad e_2, \quad e_1 + e_2 + e_3, \quad e_1 + e_2 + e_4, \quad e_1 + e_2 + e_3 + e_4$$

et

$$e_1, \quad e_1 + e_2, \quad e_2 + e_3, \quad e_2 + e_4, \quad e_2 + e_3 + e_4.$$

Comme  $Sp_4(F_2)$  permute transitivement les 15 vecteurs  $\neq 0$  de  $F_2^4$ , il y a 6 systèmes maximaux du type précédent, chaque vecteur appartenant exactement à deux tels systèmes. Comme la seule transformation symplectique qui laisse invariants tous les vecteurs  $\neq 0$  est l'identité, on voit qu'on obtient de la sorte un isomorphisme de  $Sp_4(F_2)$  dans le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_6$ ; les deux groupes ayant même ordre, la conclusion en résulte.

**6. La structure du groupe  $U_3(F_4)$ .** Le corps  $F_4$  s'obtient par adjonction à  $F_2$  de la racine  $\omega$  de l'équation quadratique  $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ , l'autre racine étant  $\omega + 1 = \omega^{-1} = \omega^2$ ; le groupe des éléments de  $F_4$  de norme 1 est formé des 3 racines cubiques de l'unité 1,  $\omega$  et  $\omega^2$ . Ce groupe est donc isomorphe au centre  $Z_3$  de  $U_3$  et au groupe quotient  $U_3/U_3^+$ . Nous allons étudier le sous-groupe distingué  $T_3$  de  $U_3^+$  engendré par les *transvections unitaires* (5).

Remarquons d'abord que si  $a$  est un vecteur non isotrope de  $E = F_4^3$ , le plan  $P$  orthogonal à la droite  $aF_4$  contient deux droites orthogonales non isotropes  $bF_4, cF_4$  et trois droites isotropes; les plans  $Q$  et  $R$  orthogonaux à  $bF_4$  et  $cF_4$  contiennent de même chacun trois droites isotropes. Les 9 droites restantes de  $E$  sont non isotropes: il y en a trois dans chaque plan (isotrope) passant par exemple par  $aF_4$  et par un vecteur isotrope  $e$  du plan  $P$ ; elles sont définies par exemple par les vecteurs  $e + a, e + \omega a, e + \omega^2 a$ . On voit ainsi que les 12 droites non isotropes de  $E$  se répartissent en 4 trièdres trirectangles.

Cela étant, une transvection unitaire de vecteur (nécessairement isotrope)  $e \in P$  par exemple, laisse invariant le vecteur  $a$ , et permute les deux droites orthogonales  $bF_4$  et  $cF_4$ . On voit donc que le groupe  $T_3$  permute entre elles les

trois droites  $aF_4, bF_4, cF_4$  de toutes les façons possibles. Il contient par suite un sous-groupe distingué  $T'_3$  formé des transformations de  $T_3$  qui laissent invariante chacune des droites  $aF_4, bF_4, cF_4$ , et il est clair que  $T_3/T'_3$  est isomorphe au groupe symétrique  $\mathfrak{S}_3$ . Remarquons d'autre part que la matrice d'une transformation de  $T'_3$  par rapport à la base  $(a, b, c)$  est une matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix}$$

où  $\alpha, \beta, \gamma$  sont pris parmi les racines cubiques de l'unité 1,  $\omega$  et  $\omega^2$ ; comme le déterminant doit être 1, on voit que  $\alpha, \beta, \gamma$  sont, ou tous égaux, ou tous distincts; le premier cas correspond aux matrices du centre  $Z_3$ , et il reste 6 autres matrices, de sorte que  $T'_3/Z_3$  est cyclique d'ordre 3. Enfin, comme  $U_3$  est d'ordre 216,  $U_3/T_3$  est d'ordre 12; on constate aussitôt qu'une quasi-symétrie de rapport  $i$  par rapport au plan  $P$  permute circulairement les trois trièdres trirectangles distincts de  $(aF_4, bF_4, cF_4)$ . Le groupe  $U_3/T_3$  permute donc les quatre trièdres trirectangles formés avec les droites non isotropes, et contient tous les 3-cycles sur ces quatre objets; il contient donc le groupe alterné  $\mathfrak{A}_4$ , et comme il a même ordre, il lui est isomorphe.

Finalement, nous avons pour  $U_3$  une suite de composition

$$U_3 \supset U_3^+ \supset T_3 \supset T'_3 \supset Z_3 \supset \{1\}$$

où les quotients successifs sont cycliques d'ordre 3, sauf  $U_3^+/T_3$  isomorphe au "Vierergroupe" et  $T_3/T'_3$  isomorphe à  $\mathfrak{S}_3$ .

**7. L'isomorphisme entre  $PU_4^+(F_4)$  et  $PSp_4(F_3)$ .** Conservant les notations du §6, soit  $(a, b, c, d)$  une base orthogonale de  $F_4^4$ ; nous avons vu que le sous-espace  $H_a$  de dimension 3 engendré par  $a, b, c$  contient 12 droites non isotropes, et 9 droites isotropes. D'autre part, un plan passant par  $d$  et par une droite non isotrope  $xF_4$  de  $H_a$  ne contient que des droites isotropes en dehors de  $dF_4$  et  $xF_4$ ; les droites non isotropes autres que  $dF_4$  et non contenues dans  $H_a$  sont donc contenues dans les plans passant par  $d$  et une des droites isotropes de  $H_a$ , et chacun de ces plans en contient 3; on obtient donc finalement 40 droites non isotropes dans  $F_4^4$  (comme il y a en tout  $255/3 = 85$  droites dans  $F_4^4$ , il y a 45 droites isotropes dans cet espace).

Remarquons d'autre part qu'il existe exactement 40 droites dans  $F_3^4$ . Nous allons voir qu'on peut définir une *correspondance biunivoque entre les droites non isotropes de  $F_4^4$  et les droites de  $F_3^4$* , de sorte qu'à deux droites orthogonales correspondent deux droites orthogonales. Cela permettra d'établir l'isomorphisme entre  $PU_4^+(F_4)$  et  $PSp_4(F_3)$  de la façon suivante: une transformation  $\bar{u}$  de  $PU_4^+(F_4)$  permute les droites non isotropes et transforme deux droites orthogonales en droites orthogonales; il lui correspond donc une permutation  $\bar{u}'$  des droites de  $F_3^4$  conservant l'orthogonalité, et par suite transformant tout hyperplan en hyperplan. En vertu du théorème fondamental de la géométrie



projective (et comme  $F_3$  n'a pas d'automorphisme non identique)  $\bar{u}'$  provient d'une transformation linéaire  $u'$  de  $F_3^4$  qui conserve l'orthogonalité; on sait (4, p. 31) qu'une telle transformation est telle que  $(u'(x), u'(y)) = \pm(x, y)$  où  $(x, y)$  est la forme alternée définissant le groupe symplectique. Or ces transformations forment un groupe dans lequel  $Sp_4(F_3)$  est un sous-groupe invariant d'indice 2. On voit donc qu'on obtient un isomorphisme  $\phi$  de  $PU^+_4(F_4)$  dans un groupe  $\Gamma$ , dont le groupe  $PSp_4(F_3)$  est sous-groupe invariant d'indice 2. Comme  $PSp_4(F_3)$  est simple,  $\Gamma$  n'a pas d'autre sous-groupe d'indice 2; mais les ordres de  $PU^+_4(F_4)$  et de  $PSp_4(F_3)$  étant tous deux égaux à 25920, ces deux groupes sont isomorphes.

Reste donc à décrire la correspondance en question; nous le ferons en associant 40 vecteurs sur les droites non isotropes de  $F_4^4$  à 40 vecteurs sur les droites de  $F_3^4$ . Observons que 4 droites deux à deux orthogonales de  $F_4^4$  doivent correspondre à 4 droites situées dans un même plan totalement isotrope de  $F_3^4$ . D'autre part, les 4 droites non isotropes d'un même plan isotrope de  $F_4^4$  doivent correspondre aux 4 droites d'un même plan non isotrope de  $F_3^4$ : considérons en effet un vecteur isotrope  $e$  dans le plan défini par  $aF_4$  et  $bF_4$ ; les plans  $P_1, P_2$  définis par  $e$  et  $c, d$  respectivement sont alors isotropes, et tout vecteur de  $P_1$  est orthogonal à tout vecteur de  $P_2$ , deux vecteurs non colinéaires et non isotropes situés dans l'un de ces plans n'étant jamais orthogonaux; si notre correspondance existe, à deux droites non isotropes distinctes de  $P_2$  correspondent deux droites non orthogonales dans  $F_3^4$ , qui engendrent donc un plan non isotrope  $Q_2$ , et aux 4 droites non isotropes de  $P_1$  doivent correspondre 4 droites orthogonales à  $Q_2$ , c'est-à-dire les 4 droites du plan non isotrope  $Q_1$  orthogonal à  $Q_2$ .

Soit alors  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  une base symplectique de  $F_3^4$ , telle que

$$(e_1, e_3) = (e_2, e_4) = 1$$

et  $(e_i, e_j) = 0$  pour tout autre couple d'indices. Aux 4 vecteurs  $a, b, c, d$  de la base choisie dans  $F_4^4$ , nous ferons correspondre 4 vecteurs d'un plan isotrope suivant la règle:

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ e_1 & e_2 & e_1 - e_2 & e_1 + e_2 \end{array}$$

Si on remarque que les 4 vecteurs  $b + c + d, c + d + a, d + a + b, a + b + c$  forment une base orthogonale de  $F_4^4$  où chaque vecteur est orthogonal au vecteur de même place dans  $(a, b, c, d)$ , on est amené à leur faire correspondre dans  $F_3^4$  4 vecteurs suivant la règle:

$$\begin{array}{cccc} a + b + c & b + c + d & a + c + d & a + b + d \\ e_3 - e_4 & e_4 & e_3 & e_3 + e_4 \end{array}$$

On trouve alors aisément, en tenant compte des remarques faites ci-dessus, que la correspondance suivante pour les vecteurs non isotropes de l'hyperplan  $H_d$  respecte l'orthogonalité et transforme les vecteurs d'un plan isotrope en les vecteurs d'un plan non isotrope:

$H_a$	$a$	$e_1$	$a + b + c$	$e_3 - e_4$
	$b$	$e_2$	$a + \omega b + \omega^2 c$	$e_1 + e_2 - e_3 + e_4$
	$c$	$e_1 - e_2$	$a + \omega^2 b + \omega c$	$e_1 + e_2 + e_3 - e_4$
	$a + \omega b + \omega c$	$e_1 + e_3 - e_4$	$a + \omega^2 b + \omega^2 c$	$e_1 - e_3 + e_4$
	$a + b + \omega^2 c$	$e_1 - e_2 - e_3 + e_4$	$a + b + \omega c$	$e_1 - e_2 + e_3 - e_4$
	$a + \omega^2 b + c$	$e_2 - e_3 + e_4$	$a + \omega b + c$	$e_2 + e_3 - e_4$

On opère de même dans les trois hyperplans  $H_c, H_b, H_a$  orthogonaux respectivement à  $c, b, a$ , ce qui donne la correspondance:

$H_c$	$a$	$e_1$	$a + b + d$	$e_3 + e_4$
	$b$	$e_2$	$a + \omega b + \omega^2 d$	$e_1 - e_2 - e_3 - e_4$
	$d$	$e_1 + e_2$	$a + \omega^2 b + \omega d$	$e_1 - e_2 + e_3 + e_4$
	$a + \omega b + \omega d$	$e_1 + e_3 + e_4$	$a + \omega^2 b + \omega^2 d$	$e_1 - e_3 - e_4$
	$a + b + \omega^2 d$	$e_1 + e_2 - e_3 - e_4$	$a + b + \omega d$	$e_1 + e_2 + e_3 + e_4$
	$a + \omega^2 b + d$	$e_2 + e_3 + e_4$	$a + \omega b + d$	$e_2 - e_3 - e_4$
$H_b$	$a$	$e_1$	$a + c + d$	$e_3$
	$c$	$e_1 - e_2$	$a + \omega c + \omega^2 d$	$e_2 - e_3$
	$d$	$e_1 + e_2$	$a + \omega^2 c + \omega d$	$e_2 + e_3$
	$a + \omega c + \omega d$	$e_1 + e_3$	$a + \omega^2 c + \omega^2 d$	$e_1 - e_3$
	$a + c + \omega^2 d$	$e_1 + e_2 + e_3$	$a + c + \omega d$	$e_1 + e_2 - e_3$
	$a + \omega^2 c + d$	$e_1 - e_2 + e_3$	$a + \omega c + d$	$e_1 - e_2 - e_3$
$H_a$	$b$	$e_2$	$b + c + d$	$e_4$
	$c$	$e_1 - e_2$	$b + \omega c + \omega^2 d$	$e_1 - e_4$
	$d$	$e_1 + e_2$	$b + \omega^2 c + \omega d$	$e_1 + e_4$
	$b + \omega c + \omega d$	$e_2 + e_4$	$b + \omega^2 c + \omega^2 d$	$e_2 - e_4$
	$b + c + \omega^2 d$	$e_1 + e_2 + e_4$	$b + c + \omega d$	$e_1 + e_2 - e_4$
	$b + \omega^2 c + d$	$e_1 - e_2 - e_4$	$b + \omega c + d$	$e_1 - e_2 + e_4$

Il reste à vérifier que deux vecteurs orthogonaux  $x, y$ , appartenant à deux hyperplans distincts, par exemple  $H_c$  et  $H_a$ , et orthogonaux, correspondent à deux vecteurs orthogonaux de  $F_3^4$ . Or, l'hypothèse entraîne que le plan (isotrope) passant par  $c$  et  $x$  et le plan (isotrope) passant par  $d$  et  $y$  contiennent la même droite isotrope, située dans le plan défini par  $a$  et  $b$ . Il suffit donc de vérifier que pour tout vecteur isotrope  $e$  dans le plan défini par  $a$  et  $b$ , un vecteur du plan passant par  $c$  et  $e$ , et un vecteur du plan passant par  $d$  et  $e$  correspondent à des vecteurs orthogonaux de  $F_3^4$  (puisque l'on sait déjà qu'il en est ainsi pour  $c$  et  $d$ , et que tous les vecteurs d'un plan isotrope contenu dans un des hyperplans  $H_a, H_b, H_c, H_d$  correspondent aux vecteurs d'un plan non isotrope dans  $F_3^4$ ). Cette vérification (qu'il faut faire pour les vecteurs isotropes des 6 plans passant par deux des vecteurs  $a, b, c, d$ ) est très facile, et achève de démontrer l'isomorphisme entre  $PU^+_4(F_4)$  et  $PSp_4(F_3)$ .

*Remarques.* (1) Le fait qu'il y ait 40 droites non isotropes et 45 droites isotropes dans  $F_4^4$  donne aussitôt les représentations connues de  $PU_4^+(F_4)$  comme groupe de permutations de 40 ou de 45 objets (2, p. 307). On voit aisément que par toute droite isotrope de  $F_4^4$  passent 3 plans totalement isotropes : si la droite donnée  $D$  est dans le plan défini par  $a$  et  $b$  par exemple, ces trois plans sont ceux passant par  $D$  et par les 3 droites isotropes du plan défini par  $c$  et  $d$ . Comme chaque plan totalement isotrope contient 5 droites isotropes, il y a en tout  $3.45/5 = 27$  plans totalement isotropes, et cela donne la représentation de  $PU_4^+(F_4)$  comme groupe de permutations de 27 objets (2).

(2) Dans la démonstration de l'isomorphie entre  $PU_4^+(F_4)$  et  $PSp_4(F_3)$ , nous avons utilisé la simplicité du second groupe mais non celle du premier. Notre démonstration peut donc servir à prouver que  $PU_4^+(F_4)$  est simple; il est aisé, à partir de là, de prouver que  $PU_n^+(F_4)$  est simple pour  $n > 4$ : en effet, deux vecteurs non isotropes quelconques  $x, y$  dans  $F_4^n$  peuvent toujours être plongés dans un sous-espace non isotrope  $V$  de dimension 4, et par suite si  $(x, x) = (y, y)$ , il existe toujours une rotation unitaire dans  $V$  qui transforme  $x$  en  $y$ . Comme dans  $V$  toute rotation est produit de rotations hyperboliques, en vertu de la simplicité de  $PU_4^+(F_4)$ , on en conclut sans peine, par récurrence sur  $n$ , que toute rotation dans  $U_n^+(F_4)$  est un produit de rotations hyperboliques (3, pp. 66-68). Cela fait, la simplicité de  $PU_4^+(F_4)$  permet de démontrer que tout sous-groupe distingué de  $U_n^+(F_4)$  non contenu dans le centre, contient une rotation hyperbolique (3, pp. 70-71) et par suite est égal à  $U_n^+(F_4)$ .

## BIBLIOGRAPHIE

1. N. Bourbaki, *Eléments de Mathématique: Algèbre*, chap. III (Actual. Scient. et Ind., no 1044, Paris, 1948).
2. L. E. Dickson, *Linear groups* (Leipzig, 1901).
3. J. Dieudonné, *Sur les groupes classiques* (Actual. Scient. et Ind., no 1040, Paris, 1948).
4. ———, *On the automorphisms of the classical groups*, *Memoirs Amer. Math. Soc.*, 2 (1951).
5. ———, *On the structure of unitary groups*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 72 (1952), 367-385.
6. ———, *Les extensions quadratiques des corps non commutatifs et leurs applications*, *Acta Mathematica*, 87 (1952), 175-242.
7. C. Jordan, *Traité des substitutions et des équations algébriques* (Paris, 1870).
8. O. Schreier und B. L. van der Waerden, *Die Automorphismen der projektiven Gruppen*, *Abh. Math. Sem. Hamburg*, 6 (1928), 302-322.
9. B. L. van der Waerden, *Gruppen von linearen Transformationen* (Berlin, 1935).
10. A. Wiman, *Endliche Gruppen linearer Substitutionen*, *Enz. math. Wiss.*, IB 3f.

*Université de Nancy and  
Northwestern University*