C. Viterbo

Solutions d'équations d'Hamilton-Jacobi et géométrie symplectique

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1995-1996), exp. nº 22, p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1995-1996____A22_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1995-1996

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

SOLUTIONS D'EQUATIONS D'HAMILTON-JACOBI ET GEOMETRIE SYMPLECTIQUE

C. VITERBO

Solutions d'équations d'Hamilton-Jacobi et géométrie symplectique

Claude Viterbo[1]

1. Introduction

Dans ce texte, on considère une méthode géométrique pour construire des solutions d'équations d'Hamilton-Jacobi (cas d'évolution du premier ordre)

$$\text{(HJ)} \qquad \frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = H(t,x,u,Du)$$

$$u(0,x) = u_0(x)$$

où Du désigne la différentielle de u par rapport à la variable x. Comme d'habitude, la variable t sera appelée "temps", la variable $x \in N$, "espace".

On supposera pour simplifier que H ne dépend pas de u, mais la méthode décrite marche dans le cas général, quitte à remplacer T^*N par $J^1(N)$, et les objets symplectiques par leurs analogues de contact. Les résultats sont en tous points analogues.

Dans une première partie, on rappelle comment la méthode classique de résolution de telles équations (dite des caractéristiques), conduit naturellement à considérer des "solutions géométriques", qui seront des sous-variétés lagrangiennes de $T^*(\mathbb{R} \times N)$. Cette idée, attribuée à Maslov lors de l'exposé, semble en fait remonter à des temps bien plus anciens (cf. le livre de Goursat cité en réference, que m'a signalé J.-M. Bony).

Nous montrerons ensuite, comment, suivant une idée de Sikorav et Chaperon ([S1],[C2]), on peut connaissant une fonction génératrice de cette sous-variété lagrangienne, lui associer une solution de l'équation. Enfin nous énonçons un certain nombre de propriétés de ces solutions, dont on trouvera la dmonstration dans l'article de Ottolenghi et l'auteur, [O-V]. Les plus remarquables sont des propriétés d'extension de l'application solution à des espaces de fonctions C^0. Nous conclurons avec un exemple illustrant le fait que, bien que ces solutions coïncident avec les "solutions de viscosité" de Crandall et Lions pour H convexe en p, comme démontré par T. Joukovskaia dans sa thèse, elles en diffèrent dans le cas général.

Dans la suite, N sera une variété *compacte* et T^*N son cotangent, muni de la forme de Liouville, pdq qui s'écrit en coordonnées locales $\sum_{i=1}^n p_i dq^i$, sa différentielle, la forme symplectique $\omega = dp \wedge dq = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq^i$.

2. Solutions géométriques d'équations d'Hamilton-Jacobi.

Posons $K(t,x,\tau,p) = \tau + H(t,x,p)$ dans $T^*(\mathbb{R} \times N)$.

[1]Université de Paris-Sud, Equipe Topologie et Dynamique, URA 1169 du CNRS

Soit u une solution C^2 de l'équation (HJ). Cela revient à dire que la variété $\Gamma_u = \{(t,x,\frac{\partial}{\partial t}u(t,x), Du(t,x))\}$ contient $\Gamma_{u_0} = \{(0,x,-H(0,x,Du_0(x)), Du_0(x))\}$, et est contenue dans $\Sigma = \{(t,x,\tau,p) \mid K(t,x,\tau,p) = 0\}$.

On remarque que $\{(t,x,\frac{\partial}{\partial t}u(t,x), Du(t,x)\}$ est la forme générale d'un graphe lagrangien de $T^*(\mathbb{R} \times N)$. Cela permet de construire Γ_u localement comme suit: Γ_{u_0} est une sous-variété isotrope, c'est - à -dire que ω s'annule sur son espace tangent.

Soit ϕ_t le flot du Hamiltonien K dans $T^*(\mathbb{R} \times N)$. La forme de notre équation (cas d'évolution) nous assure que le flot de ϕ_t est engendré par un champ de vecteur X_K, transverse à Γ_{u_0}. Alors, du moins au voisinage de Γ_{u_0}, $L = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \phi_t(\Gamma_{u_0})$ est une sous-variété, elle est lagrangienne, car X_K est symplectiquement orthogonal à tout vecteur tangent à Σ, donc $T_{(0,x)}L = T_x\Gamma_{u_0} + \mathbb{R}X_K$ est lagrangien, et comme ϕ_t préserve ω , et tout point de L est image d'un point de Γ_{u_0} par ϕ_t, L est lagrangienne partout.

On appelle donc solution géométrique de (HJ) , la sous variété Lagrangienne L définie ci-dessus.

Remarque:

Dans les cas d'une équation qui ne soit pas d'évolution, donc du type

$$H(z,du) = 0; z \in M$$

on peut encore définir une solution géométrique, comme une sous-variété lagrangienne de $T^*(M)$ contenue dans $H(z,p) = 0$. Cependant, dans ce cas une telle sous-variété peut ne pas exister, ou ne pas être unique. Même si l'on rajoute une condition aux limites du type $u = u_0$ sur M_0 (où M_0 est une hypersurface de M), ce qui revient à imposer que L contienne une sous-variété coisotrope donnée, de dimension $n-1$ (dans $T^*(M)$ qui est de dimension $2n$), appliquer le flot de X_H peut fournir une variété qui n'est pas proprement immergée. Cela n'arrive pas dans le cas d'évolution, car la fonction t est alors propre sur l'image de Γ_{u_0} par le flot.

Au voisinage de Γ_{u_0} la sous-variété L est effectivement un graphe. En effet, X_K a une composante en $\frac{\partial}{\partial t}$ égale à 1, et donc $T_{(0,x)}L = T_x\Gamma_{u_0} + \mathbb{R}X_K$ est transverse à la verticale (i.e. direction engendrée par $\frac{\partial}{\partial t}$ et les $\frac{\partial}{\partial p_i}$). Notons que la transversalité de X_K à Γ_{u_0} qui permet de dire que L est bien une sous-variété (localement), on dit alors que la condition initiale est non caractéristique, est équivalente au fait que L soit un graphe au voisinage de Γ_{u_0}.

L'équivalence de ces deux propriétés reste vraie pour des équations qui ne sont pas du type d'évolution.

3. Fonctions génératrices, et solutions de (HJ)

On part maintenant d'une solution géométrique de (HJ), notée L. On suppose pour le moment que L admet une description de la forme suivante.

$$L = \{(t,x,\frac{\partial}{\partial t}S(t,x,\xi)\frac{\partial}{\partial x}S(t,x,\xi)) \mid \frac{\partial}{\partial \xi}S(x,\xi) = 0\}$$

où $S : (\mathbb{R} \times N) \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ est une fonction C^∞ (pour l'instant) qui coïncide avec une forme quadratique non dégénérée, Q, en la dernière variable.

Soit alors $u(t,x)$ le "minmax" de S. Nous entendons par la une fonction obtenue comme suit. Soit $\mathbb{R}^k = E_+ \oplus E_-$ la décomposition de $\mathbb{R}^k$ en espace positif et négatif pour Q. Soit $\alpha(\xi) = \rho(\xi_-)dv_-$ (ξ_- est la projection de ξ sur E_-, dv_- est la forme volume sur E_-) où ρ est une fonction d'intégrale non nulle. La classe de cohomologie de α dans $H^*(E, E^{-b})$ est alors non nulle pour b grand, et l'on pose

$$u(t,x) = \inf\{a \mid \alpha \neq 0 \text{ dans } H^*(E^a, E^{-b})\}$$

En d'autres termes, $u(x)$ est le plus petit niveau a tel que la restriction de α à E^a ne soit pas la différentielle d'une forme à support de projection sur E_- compacte. La topologie des niveaux doit donc changer au passage de ce niveau, qui est donc une valeur critique de $\xi \to S(x,\xi)$ (voir [V]).

Montrer que u est solution de (HJ) est très facile lorsque on peut trouver une fonction $\xi(t,x)$ lisse, telle que

$$u(t,x) = S(t,x,\xi(t,x))$$

En effet, dans ce cas, on a $\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}S(t,x,\xi(t,x)) + \frac{\partial}{\partial \xi}S(t,x,\xi(t,x)\frac{\partial}{\partial t}\xi(t,x)$ et comme le terme $\frac{\partial}{\partial \xi}S(t,x,\xi(t,x)$ est nul, il reste $\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}S(t,x,\xi(t,x))$
De même $\frac{\partial}{\partial x}u(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}S(t,x,\xi(t,x))$
Maintenant,

$$(t,x,\frac{\partial}{\partial t}u(t,x),\frac{\partial}{\partial x}u(t,x)) = (t,x,\frac{\partial}{\partial t}S(t,x,\xi(t,x)),\frac{\partial}{\partial x}S(t,x,\xi(t,x))$$

et comme $\frac{\partial}{\partial \xi}S(t,x,\xi(t,x)) = 0$ on a que $(t,x,\frac{\partial}{\partial t}u(t,x),\frac{\partial}{\partial x}u(t,x))$ est dans L. Vu que L est contenue dans $K = 0$ on a montré que u vérifie (HJ).

Les points où $\xi(t,x)$ "saute" sont génériquement sur une hypersurface, et en ces points u n'est en général pas dérivable. Cependant, on montre en utilisant les théorèmes de transversalité que l'équation (HJ) est vérifiée sur un ouvert dense de N.

Nous venons de voir que si L possède une fonction génératrice, S,on peut construire une solution généralisée de (HJ) à partir de cette fonction. Nous ne nous sommes pour l'instant préoccupés ni de l'existence ni de l'unicité d'une telle fonction. C'est un théorème de Laudenbach et Sikorav qui permet de répondre affirmativement à la première question, et un théorème de l'auteur, à la seconde (voir [V], [Th]). Ces deux théorèmes affirment pour L une sous-variété lagrangienne, isotope par une isotopie Hamiltonienne à la section nulle, d'une part l'existence de la fonction génératrice S, d'autre part son unicité modulo es opérations suivantes, dont on vérifie aisément qu'elles sont sans effet (autre que l'addition d'une constante) sur u:

(i) $S_2(t,x,\xi) = S_1(t,x,\xi) + C$
(ii) $S_2(t,x,\xi,\eta) = S_1(t,x,\xi) \oplus Q'(\eta)$
(iii)$S_2(t,x,\eta) = S_1(t,x,\xi(t,x,\eta))$ où $(t,x,\eta) \to (t,x,\xi(t,x,\eta))$ est un difféomorphisme (préservant la projection sur (t,x)).

Reste donc à voir que le L, solution géométrique de (HJ), s'obtient par isotopie Hamiltonienne de la section nulle.

Pour cela, on déforme d'abord Γ_{u_0} en Γ_0, par la déformation $\lambda \to \Gamma_{\lambda u_0}$. Puis on déforme K en la fonction τ par $\mu \to K_\mu = \tau + \mu H(t,x,p)$ en vérifiant que pour chaque valeur de μ le niveau $K_\mu = 0$ est régulier (et on voit que cette dernière opération ne peut se faire si l'équation n'est pas d'évolution). La solution géométrique associée à la condition initiale 0 et au Hamiltonien nul est évidemment la section nulle. On a donc déformé L continûment en la section nulle, parmi les sous-variétés lagrangiennes propres de $T^*(\mathbb{R} \times N)$.

4. Etude de u et comparaison avec les solutions de viscosité.

On notera ici par J l'opérateur qui associe au couple (H, u_0) de la "solution variationnelle" de (HJ) obtenue précédemment, et H étant sous-entendu, par $J_{t_0,t_1}(u_0)$ la fonction $u(t_1, x)$ telle que u soit solution de

$$\text{(HJ)} \qquad \frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = H(t,x,u,Du)$$

$$u(t_0, x) = u_0(x)$$

On établit que J possède les propriétés suivantes:

Théorème. *:*

(1) J s'étend en une application continue de $C^{Lip}(T^*(\mathbb{R}\times N)\times C^0(N) \to C^0(\mathbb{R}\times N)$

(2) J coïncide avec la solution obtenue par a méthode des caractéristiques pour t petit.

(3) Si H est convexe en p, u coïncide avec la solution de viscosité

(4) Dans le cas général, u ne coïncide pas avec la solution de viscosité. En particulier, en général $J_{t,s} \circ J_{0,t} \neq J_{0,t+s}$.

Remarques:

(1) Notons tout de même que la propriété (4) dit que l'on a un type de solution "non Markovien". La solution à l'instant s n'est pas déterminée par la connaissance de la solution à l'instant $t < s$, mais dépend de la condition initiale à l'instant 0. En d'autres termes, à l'instant t, la solution "se souvient" de ce qui s'est passé précédemment, contrairement au cas des solutions de viscosité.

(2) La condition que H soit Lipschitzienne sert à s'assurer que le flot Hamiltonien associé à H est défini pour tout temps. Il est bon de noter que seul la direction non compacte des fibres de T^*N intervient, et donc qu'il suffit que H soit Lipschitz en q (mais uniformément en p), d'autres conditions, que l'on laisse au lecteur le soin d'énoncer, peuvent s'y substituer.

Ce type de solution est susceptible d'apparaître dans des phénomènes du type "hystérésis", bien que l'auteur ne connaisse pas d'exemple concret explicite, pour lequel la solution physique est celle que l'on décrit ici, plutôt que la solution de viscosité.

Le point (3) est du à T. Joukovskaia, le reste du théorème est du à Ottolenghi et l'auteur. Nous nous contentons ici de donner un exemple illustrant le point (4).

Pour cela nous allons illustrer les propriétés des deux types de solutions. Pour la solution variationnelle, le graphe de du est contenu dans L et u est continue. Par contre, être une solution de viscosité impose une contrainte forte sur les sauts de du.

Rappelons la principale propriété d'une solution de viscosité. Supposons que Σ soit une hypersurface de $\mathbb{R} \times N$ et que $u = u_-$ d'un côté de Σ, et $u = u_+$ de l'autre côté, u_+, et u_- étant C^1. Soit ν la normale à Σ allant du domaine de définition de u_- à celui de u_+, et p_T la projection sur l'espace tangent à Σ. Alors u est solution de viscosité pourvu que l'on ait à la fois:

$$\forall z \in \Sigma \quad \forall \alpha \in [du_+(z)\nu(z), du_-(z)\nu(z)] \quad K(z, p_T(du_+)(z) + \alpha\nu(z)) \leq 0$$

$$\forall z \in \Sigma \quad \forall \alpha \in [du_-(z)\nu(z), du_+(z)\nu(z)] \quad K(z, p_T(du_+)(z) + \alpha\nu(z)) \geq 0$$

Notons que $p_T(du_+)(z) = p_T(du_-)(z)$, et que, sauf dans le cas où $du_-(z) = du_+(z)$, l'une des deux conditions ci-dessus est vide.

Considérons le cas où K est du type $\tau + H(t, x, p)$ avec $x \in \mathbb{R}$. alors le graphe de du est contenu dans $\tau + H(t, x, p) = 0$. Donc si on note en un point de discontinuité de du p_-, p_+ les valeurs de chaque côté de σ de p, on aura $\tau_\pm + H(t, x, p_\pm)$. Il suffit donc de connaître $p_\pm$ pour connaître le saut de du à travers Σ. De plus le signe de $K(z, p_T(du_+)(z) + p\nu(z))$ est nul en $du_+(z)\nu(z)$ et $du_-(z)\nu(z)$, et comme K est linéaire en τ, c'est la variation de $p \to H(t, x, p)$ pour p dans $[p_-, p_+]$ (ou $[p_+, p_-]$) qui compte.

En particulier, pour que u soit solution de viscosité, il faut que

(i) si $p_- \leq p_+$, $p \to H(t, x, p)$ ne soit pas strictement convexe sur $[p_-, p_+]$

(ii) si $p_+ \leq p_-$, $p \to H(t, x, p)$ ne soit pas strictement concave sur $[p_+, p_-]$

Lorsque $p_- \leq p_+$ (resp. $p_+ \leq p_-$), on dit que l'on a affaire à un saut montant (resp. descendant).

Plus précisément, supposons que L soit de dimension deux, c'est-à-dire que N soit de dimension 1.

Alors si L_t, réduction de L en t, est comme sur la figure 1, et que $H(t, x, p)$ est convexe en p, L ne peut correspondre à une solution de viscosité, car le "saut de droite" est "montant", ni à une solution de viscosité pour $-K$ au lieu de K, car le saut de gauche est descendant.

Donc si pour une solution géométrique donnée d'une équation (HJ) , on a que L_t est donné par la figure 1, et que H est convexe en p, la solution variationnelle ne peut être solution de viscosité. Mais il est facile de trouver un flot Hamiltonien qui envoie la section nulle sur la figure 1. On peut même s'arranger pour que $H(t, x, p) = 0$ pour $t \geq t_0$. Alors au delà de $t_1 > t_0$, on peut s'arranger pour que H soit convexe en p, et son flot laisse, au moins pendant un temps petit, L_t de la forme ci-dessous.

On voit alors que la solution variationnelle ne peut ni être solution de viscosité pour H, ni pour $-H$ (contrairement au cas variationnel, K et $-K$ ne correspondent pas nécessairement à la même solution de viscosité).

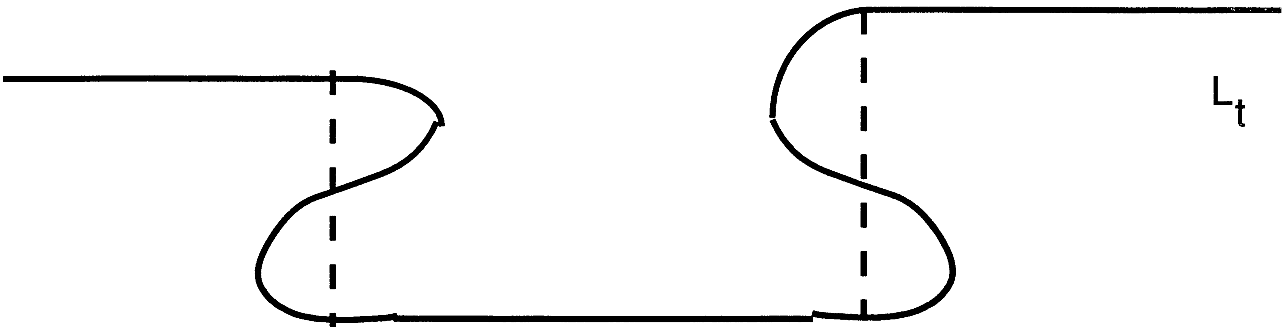

Figure 1

References

[C] Chaperon, M., *Lois de conservation et géométrie symplectique*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, Série I **312** (1991), 345–348.

[C-L] Crandall, M. Lions, P.-L., *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **277** (1983), 1–42.

[G] Goursat, E., *Leçon sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, Hermann, 1921.

[J] Joukovskaia, T., *Thèse de Doctorat*, Université de Paris 7, Denis Diderot, 1993.

[O-V] A. Ottolenghi, C. Viterbo, *Solutions généralisées pour l'équation d'Hamilton-Jacobi dans le cas d'évolution.*, en préparation..

[S1] Sikorav, J.-C., *Sur les sous-variétés lagrangiennes admettant une phase génératrice globale*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, Série I **302** (1986), 119–122.

[S2] Sikorav, J.-C., *Exposé au séminaire de Paris 7* (1990).

[Th] Théret, D., *Thèse de Doctorat*, Université de Paris 7, Denis Diderot, 1995.

[V] Viterbo, C., *Symplectic topology as the geometry of generating functions*, Math. Annalen **292** (1992), 685–710.