MATH 256 **Mathématiques S4**
Université Paris - Saclay **2021-2022**

Feuille d'exercices 2

Limites de suites

2.1. Vrai ou faux ? Parmi les assertions suivantes, dire lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses en justifiant :

1. Une suite de nombres réels qui converge vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
2. Si une suite de nombres complexes $(u_n)_{n\geq 1}$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = 0$
3. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres complexes telle que $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = 0$. Alors $(u_n)_{n\geq 1}$ converge.
4. Une suite de nombres réels $(u_n)_{n\geq 1}$ converge si et seulement si la suite $(e^{u_n})_{n\geq 1}$ converge.
5. Même question pour une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de nombres complexes.

2.2. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels strictement positifs telle que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a$

1. Donner un exemple d'une telle suite telle que $a = 0$. Telle que $a = 1$. Telle que $a = 2$.
2. On suppose que $a < 1$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0
3. On suppose que $a > 1$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ tend vers $+\infty$
4. On suppose que $a = 1$. Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

2.3. Calculer la limite si elle existe des suites suivantes

1. $u_n = \frac{n+4}{n^2-5n+1}$
2. $u_n = \sin(\frac{(-1)^n}{n})$
3. $u_n = \frac{\ln(n)}{n^2+1}$
4. $u_n = \frac{n^2+2^n}{3^n}$
5. $u_n = n\cos(\frac{n\pi}{2}$
6. $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
7. $u_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n$

2.4. Racines de l'unité. Soit $n \geq 2$ un entier.

1. En cherchant z sous la forme trigonémétrique, montrer qu'il existe exactement n nombres complexes vérifiant $z^n = 1$. Expliciter ces n nombres complexes.
2. Soit u un nombre complexe non nul. Combien de solutions dans $\mathbb{C}$ possè de l'équation (d'inconnue z) $z^n = u$. (On montrera d'abord qu'il existe une solution z_0, puis en utilisant la première question on exprimera les autres solutions en fonction de z_0).

2.5. Calculer la limite, si elle existe, des suites suivantes :

1. $u_n = \left(\frac{\cos(a+\frac{1}{n})}{\cos(a)}\right)^n$
2. $u_n = n^2(2^{1/n^2} - 1$

2.6. Pour tout entier n on pose $u_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n(n!)}$

1. Montrer que u_n est croissante, v_n décroissante et que $\lim_n v_n - u_n = 0$. On dit que les suites sont **adjacentes**.

2. En déduire que les suites u_n, v_n ont une limite et que cette limite est la même. On la note l
3. Trouver un intervalle de longueur inférieure à $0,02$ près contenant l.

2.7. Pour tout entier n on pose $u_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n(n!)}$

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$,
2. En déduire que les suites u_n, v_n ont une limite et que cette limite est la même. On la note l
3. Trouver un intervalle de longueur inférieure à $0,02$ près contenant l.

2.8.

1. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ On proposera au moins deux méthodes différentes
2. En déduire pour tout $x \geq 0$ la limite de la suite $u_n = \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$ où $\lfloor kx \rfloor$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à kx

2.9. Donner la limite des suites suivantes

1. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right)$
2. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$
3. $u_n = \sum_{k=2}^{n} \ln \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

2.10. Un compte en banque est rémunéré à 2%. une fois pas an, à la date anniversaire de la création du compte, les intérêts sont crédités, puis 40 euros de frais de tenue de compte sont débités.

1. On fait un versement initial de 1000 euros et on laisse le compte au repos. Que se passe-t-il ?
2. Quel est el versement initial minimal pour que le compte ne se vide pas ?
3. On fait un versement initial de 3000 euros. Est-ce que le compte atteindra un jour 5000 euros et si oui au bout de combien d'années ?