Feuille d'exercices 3

1. Espaces vectoriels de fonctions

1.1. Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Parmi tous les sous-ensembles suivants, déterminer lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

a) Les fonctions constantes. b) Les fonctions croissantes. c) Les fonctions vérifiant $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 2$.
d) Les fonctions paires. e) Les fonctions π-périodiques. f) Les fonctions vérifiant $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.
g) Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $f''(t) - 6f'(t) + 5f(t) = 0$.

1.2. Soient les fonctions définies sur $[\,0,\ 2\pi\,]$ par

$$f_1(t) = \cos t \qquad f_2(t) = t\cos t \qquad f_3(t) = \sin t \qquad f_4(t) = t\sin t$$

Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre dans $\mathcal{C}\left([\,0,\ 2\pi\,],\ \mathbb{R}\right)$.

1.3. Soient $a_1 < a_2 < a_3$ trois réels.
Montrer que la famille de fonctions $(t \to \exp(a_i t))_{1 \leq i \leq 3}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Généralisation ?

1.4. Soit I un intervalle ouvert et $f, g \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.
Considérons alors les fonctions $F, G \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$ définies à partir de f et g par $F(t) = (f(t), f'(t))$ et $G(t) = (g(t), g'(t))$, pour tout $t \in I$.
Montrer que : la famille (f, g) est libre dans $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) \Leftrightarrow$ la famille (F, G) est libre dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^2)$.

2. Systèmes différentiels linéaires

On sait (Cours) que les solutions maximales des systèmes différentiels linéaires et des équations différentielles linéaires sont globales. Par la suite, le mot solution désignera toujours une solution globale.

2.1. On considère le système différentiel :

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{lllll} x' & = & x & & -2z \\ y' & = & 6x & +4y & -6z \\ z' & = & 6x & +3y & -7z \end{array} \right.$$

1. Montrer que la matrice du système est diagonalisable, calculer ses valeurs propres et déterminer une base de vecteurs propres.
2. En déduire l'ensemble des solutions de (S).
3. Quelle est la solution de (S) telle que $x(0) = 0$, $y(0) = -1$ et $z(0) = -1$?
4. Déterminer l'ensemble des solutions de (S) telles que $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ tendent toutes les trois vers 0 quand $t \to +\infty$.

2.2. On considère le système différentiel

$$(S) \qquad \begin{cases} x'(t) = & x(t) - 4y(t) \\ y'(t) = & 2x(t) + 5y(t) \end{cases}$$

1. La matrice du système est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?
2. Déterminer les solutions à valeurs complexes de (S), puis les solutions à valeurs réelles.

2.3. On considère le système différentiel défini sur $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (S)$$

1. Résoudre le système homogène associé à (S).
2. En remarquant que $(5, 1)$ est un vecteur propre de la matrice du système correspondant à la valeur propre 2, chercher une solution particulière de (S) de la forme

   $$X(t) = \alpha(t) e^{2t} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   où la fonction α est à déterminer.
3. Déterminer l'ensemble des solutions de (S).

2.4. On considère le système différentiel sur $\mathbb{R}$

$$(S) \qquad \begin{cases} x'(t) = & 2x(t) + \ 3y(t) \quad + 2e^t \\ y'(t) = & 3x(t) + \ 2y(t) \end{cases}$$

1. Déterminer les solutions du système homogène associé à (S).
2. Trouver une solution particulière de (S) en appliquant la technique du changement d'inconnue ou la méthode de variation des constantes.
3. Donner l'ensemble des solutions de (S).

2.5. Mêmes questions pour le le système différentiel sur $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.6. On considère le système différentiel

$$(S) \qquad \begin{cases} x'' & = & 2x & -y' \\ y'' & = & -y & +2x' \end{cases}$$

1. En introduisant les fonctions inconnues auxiliaires $z = x'$ et $w = y'$, transformer (S) en un système différentiel 4×4 du premier ordre

   $$(S') \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

2. Montrer que le polynôme caractéristique de A est $P_A(x) = (x+1)(x-1)(x^2+2)$.
   La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?
3. Déterminer les solutions à valeurs réelles de (S'). En déduire celles de (S).

2.7. *(Pour introduire la section 3.)*
On considère le système différentiel sur l'intervalle $]\,0,\ +\infty\,[$

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2/t^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{S}$$

1. Monter que les fonctions définies sur $]\,0,\ +\infty\,[$ par

$$Z_1(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Z_2(t) = \begin{pmatrix} 1/t \\ -1/t^2 \end{pmatrix}$$

   sont solutions de (SH), le système homogène associé à (S).
   Montrer que la famille (Z_1, Z_2) est libre dans $\mathcal{C}^1\big(\,]\,0,\ +\infty\,[\,,\mathbb{R}^2\big)$.
   En déduire l'ensemble des solutions de (SH).
2. Utiliser la méthode de variation des constantes pour déterminer une solution particulière de (S).
   Déterminer l'ensemble des solutions de (S).
3. Préciser le lien entre l'équation différentielle sur $]\,0,\ +\infty\,[$

$$u''(t) - \frac{2}{t^2}u(t) = 3 \tag{E}$$

   et le système (S). En déduire l'ensemble des solutions de (E).

3. Variation des constantes pour une équation différentielle linéaire

3.1. On considère l'équation différentielle sur l'intervalle $]\,0,\ +\infty\,[$

$$x''(t) - 6x'(t) + 9x(t) = \frac{e^{3t}}{t^2} \tag{E}$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E).
2. Utiliser la méthode de variation des constantes pour déterminer une solution particulière de (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

3.2. Utiliser la méthode de variation des constantes pour résoudre sur l'intervalle $]-\pi/2,\ \pi/2\,[$ l'équation différentielle

$$x''(t) + x(t) = b(t)$$

1. Si $b(t) = \dfrac{1}{\cos t}$.
2. Si $b(t) = \tan t$. *Indication : on sera amené dans les calculs à déterminer une primitive de* $-\dfrac{\sin^2 t}{\cos t}$, *utiliser alors le changement de variable* $u = \sin t$.

4. Systèmes différentiels linéaires dans le plan (1/2)

Dans l'exercice 4.2 on fera l'étude complète du portrait de phases pour se familiariser avec les notions de base : trajectoires (rectilignes ou non), points d'équilibre... On reproduit ici dans des cas concrets ce qui est fait dans les sections 7.2.1, 7.2.2 et 7.2.3 du Poly.
Dans l'exercice 4.4, au contraire, on profite de ces sections pour tracer rapidement le portrait de phases une fois qu'on a déterminé son type (l'exercice 4.3 aide à comprendre pourquoi : Poly 7.1.5).

4.1 Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Soit le système différentiel linéaire (S) : $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

1. En considérant les solutions de (S) comme des courbes paramétrées du plan, rappeler l'interprétation cinématique du vecteur $(x'(t), y'(t))$.
2. A l'aide du champ de vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (expliquer cette notion), donner l'interprétation géométrique du système (S) et du lien entre les trajectoires de (S) et le champ de vecteurs.

4.2. Pour chacune des matrices suivantes

a) $M = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ b) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ c) $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ d) $M = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

on considère le système différentiel linéaire (S) : $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

1. Tracer le champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (pour a), b) et e)).
2. Déterminer les solutions du système.
3. Déterminer les points d'équilibre et les trajectoires rectilignes de (S). *On travaillera à partir des solutions du système et (pour a), b) et e)) on fera aussi le lien avec la question 1.*
4. Étudier l'allure des autres trajectoires.
5. Tracer le portrait de phases du système et préciser son type (« col », « nœud répulsif »...).
   Donner la nature $(*)$ des points d'équilibre (stable, instable, attractif, répulsif).
   $(*)$ *On ne demande pas de justification, mais on doit comprendre intuitivement la réponse.*

4.3. On considère les systèmes différentiels

$$(S1) : \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (S2) : \begin{pmatrix} \widetilde{x}'(t) \\ \widetilde{y}'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{x}(t) \\ \widetilde{y}(t) \end{pmatrix}$$

1. En remarquant que les matrices des systèmes sont semblables, préciser le lien entre les solutions, les trajectoires et les portraits de phases de $(S1)$ et $(S2)$ *(voir la section 7.1.5 du Poly).*
2. Tracer les trajectoires rectilignes de $(S1)$. Donner l'allure de son portrait de phases à partir de la question précédente (le portrait de phases de $(S2)$ a été étudié dans l'exercice 4.2).

4.4. Pour les matrices suivantes

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

on considère le système différentiel linéaire (S) de matrice A.

1. Déterminer les valeurs propres de A et une base de chaque espace propre.
2. En déduire le type de portrait de phases du système (S).
3. Dessiner les trajectoires rectilignes du système et compléter l'allure du portrait de phases à partir de la question précédente et de l'étude générale du cours.