Parcours élève ingénieur Polytech | **Mathématiques S3**
Université Paris-Saclay | **2020-2021**

Feuille d'exercices 4

1. Systèmes différentiels linéaires dans le plan (2/2)

Dans l'exercice 1.1 on reproduit dans un cas concret ce qui est fait dans la section 7.2.3 du Poly. Pour 1.2, au contraire, on profite du travail fait en cours pour tracer le portrait de phases une fois qu'on a déterminé son type.

1.1. Soit le système différentiel

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \tag{S}$$

Montrer que dans l'identification de $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ donnée par $(x,y) \longleftrightarrow z = x + iy$ on a

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longleftrightarrow (2 - i3)z$$

en déduire que (S) s'écrit $z'(t) = (2 - i3)z(t)$, où $z(t) = x(t) + iy(t)$.
Résoudre cette équation, en déduire le portrait de phases du système (S) et ses solutions.

1.2. On considère le système différentiel (S) de matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A.
2. En déduire le type de portrait de phases de (S) et donner son l'allure.
   Pour le sens de rotation, s'aider de la valeur du champ de vecteurs de (S) en un point.

2. Familles à un paramètre de systèmes différentiels linéaires

Dans la question 2 des exercices de cette partie, on prendra comme modèle de rédaction la discussion de la Section 7.2.4 du Poly.

2.1. Pour tout $\alpha \geq 0$ soit

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1-\alpha^2}{4} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Considérons le système différentiel

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A_\alpha \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \tag{S_α}$$

1. Calculer trace(A_α), det(A_α), ainsi que P_{A_α} (le polynôme caractéristique de A_α) et $\Delta(\alpha)$ (son discriminant).
2. Déterminer le type de portrait de phases $(*)$ du système (S_α) en fonction de α, pour tout $\alpha \geq 0$.

2.2. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ soit (S_α) le système différentiel de matrice

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha + 1 & 1 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer trace(A_α), det(A_α) et $\Delta(\alpha)$ (le discriminant du polynôme caractéristique de A_α).
2. En déduire le type de portrait de phases $(*)$ du système (S_α) en fonction de α, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

$(*)$ *Voir Poly Sect 7.2. Lorsque le portrait de phases porte un nom, on le donnera (par exemple : « foyer répulsif »). Dans les trois cas où il n'a pas un nom particulier, on le caractérisera comme suit :*

i) *A_α est la matrice nulle.*

ii) *0 valeur propre simple de A_α.*

iii) *0 valeur propre double de A_α et A_α non diagonalisable.*

Il s'agit respectivement des cas 1.1, 1.2 et 2.1 de la classification du Cours.

3. Portraits de phases en dimension 1

Un système différentiel autonome en dimension 1 *est une équation différentielle autonome.*

3.1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $f(x) = 7x$. On considère l'équation différentielle autonome

$$x'(t) = f(x(t)) = 7x(t) \tag{E}$$

1. Déterminer les solutions maximales $x : I \to \mathbb{R}$ de (E). Tracer leurs graphes sur le plan Otx.
2. Déterminer les trajectoires $x(I) = \{ x(t) \mid t \in I\}$. Dessiner le portrait de phases de (E) sur l'axe Ox. Quelle est la nature du point d'équilibre ?

Mêmes questions si $f(x) = -3x$.

3.2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $f(x) = x^2 - 2x$. Considérons l'équation différentielle autonome

$$x'(t) = f(x(t)) \tag{E}$$

1. Déterminer les solutions maximales constantes de (E). Préciser les points d'équilibre de (E).
2. Soit $x : I \to \mathbb{R}$ une solution maximale non constante. Montrer que
   (a) Ou bien la trajectoire $x(I) \subset \,]-\infty, 0[$.
   (b) Ou bien la trajectoire $x(I) \subset \,]0, 2[$.
   (c) Ou bien la trajectoire $x(I) \subset \,]2, +\infty[$.
3. Que nous dit le Cours (Poly, Prop 7.3.1) sur les inclusions des cas précédents ? Quelle est l'orientation de la trajectoire $x(I)$? Dessiner alors sur l'axe Ox du plan Otx le portrait de phases de (E) et préciser la nature des points d'équilibre de l'équation.
   Sans faire de calculs, esquisser l'allure des graphes des solutions de l'équation dans le plan Otx.
4. Retrouver le portrait de phases de (E) à partir du tableau de signes de f (Poly, Sect 7.3).

3.3. Pour les familles à un paramètre d'équations autonomes (E_μ) suivantes

a) $x'(t) = \mu x(t)$ $(\mu \in \mathbb{R})$ b) $x'(t) = x^2(t) - \mu x(t)$ $(\mu \in \mathbb{R})$ c) $x'(t) = x^3(t) - \mu x(t)$ $(\mu \in \mathbb{R})$

1. Déterminer le diagramme de bifurcation (Poly Sect 7.3.1) : sur le plan $Ox\mu$, le portrait de phases de l'équation (E_{μ_0}) figurera sur la droite $\mu = \mu_0$.
   On précisera pour chaque valeur du paramètre μ les points d'équilibre de (E_μ) et leur nature.
2. Préciser les valeurs de μ où il y a un changement qualitatif du portrait de phases (bifurcation).

4. Linéarisation autour d'un point d'équilibre

4.1. Soit le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = -2x(t) - y^2(t) \\ y'(t) = -x^2(t) - y(t) \end{cases} \tag{S}$$

1. Montrer que $(0, 0)$ est un point d'équilibre du système.
2. Déterminer la matrice de $(LinS)$, le système linéarisé de (S) au point d'équilibre $(0, 0)$.
3. Étudier la nature de $(0, 0)$ comme point d'équilibre de (S) à l'aide du Th. de Liapounov.
4. Quel est le type de portrait de phases de $(LinS)$? Quelle est la nature de son point d'équilibre ?

4.2. Déterminer les points d'équilibre du système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) \\ y'(t) = x^2(t) - 1 \end{cases} \tag{S}$$

1. Déterminer la matrice du système linéarisé de (S) en chaque point d'équilibre.
2. Déterminer grâce au Th. de Liapounov la nature des points d'équilibre de (S).
3. Préciser les types de portrait de phases des systèmes linéarisés de (S).

4.3. Exercice supplémentaire.

On donne dans cet exercice un exemple en dimension 2 qui montre que la linéarisation ne conserve pas toujours la nature des points d'équilibre :

Soit λ un réel non nul. Considérons le système différentiel

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y(t) \\ x(t) \end{pmatrix} + \lambda(x^2(t)+y^2(t)) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \tag{S_λ}$$

1. Montrer que l'origine est un point d'équilibre du système.
   Montrer que le système linéarisé de (S_λ) au point $(0,0)$ est

   $$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y(t) \\ x(t) \end{pmatrix} \tag{L}$$

   Quel est le type de portrait de phases du système (L) ?
   Quelle est la nature de $(0,0)$ comme point d'équilibre de (L) ?
   Le Th. de Liapounov s'applique-t-il ici ?
2. Décrire géométriquement les champs de vecteurs

   $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} + \lambda(x^2+y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

   Que peut-on conjecturer sur le portrait de phases de (S_λ) et la nature de son point d'équilibre en fonction du signe de λ ?
3. A partir des coordonnées polaires $(\rho, \theta) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, on introduit les inconnues $\rho(t)$ et $\theta(t)$ par

   $$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \rho(t) \begin{pmatrix} \cos\theta(t) \\ \sin\theta(t) \end{pmatrix} \tag{P}$$

   Exprimer $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ dans la base ($\begin{pmatrix} \cos\theta(t) \\ \sin\theta(t) \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\sin\theta(t) \\ \cos\theta(t) \end{pmatrix}$) à partir de (P), puis à partir de (S_λ).
   En déduire que les solutions de (S_λ) autres que la solution nulle sont données par

   $$\begin{cases} \rho'(t) = \lambda\rho^3(t) \\ \theta'(t) = 1 \end{cases}$$

4. Déterminer le portrait de phases de (S_λ) et la nature de son point d'équilibre.
   Il n'est pas nécessaire de calculer explicitement ρ, il suffit d'étudier le portrait de phases de l'équation $\rho'(t) = \lambda\rho^3(t)$.

5. Systèmes conservatifs

5.1. On considère l'équation différentielle

$$x''(t) = \frac{1}{2}x^2(t) - x(t) \tag{E}$$

Déterminer une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\operatorname{grad} \varphi(x) = \varphi'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x$$

Si $v(t) = x'(t)$, l'équation (E) équivaut alors au système différentiel conservatif

$$\begin{cases} x'(t) = v(t) \\ v'(t) = -\operatorname{grad} \varphi(x(t)) = \dfrac{1}{2}x^2(t) - x(t) \end{cases} \tag{SC}$$

1. Soit $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction
$$H(x,v) = \frac{v^2}{2} + \varphi(x)$$
Montrer que H est constante le long des trajectoires du système (SC) (on dit alors que H est une *intégrale première* du système).
2. Déterminer les points d'équilibre du système.
Préciser leur nature à l'aide des Théorèmes de Lejeune-Dirichlet et de Liapounov.
3. On pourra utiliser Scilab pour donner l'allure des courbes de niveau de la fonction H.
En déduire le portrait de phases du système (SC).

5.2. Étudier de la même manière l'équation différentielle $x''(t) = -4x^3(t) + 2x(t)$

5.3.

1. On considère l'équation différentielle linéaire (oscillateur harmonique non amorti)
$$x''(t) = -2x(t) \tag{E}$$
   (a) Soit $v(t) = x'(t)$. Écrire le système différentiel linéaire (S) équivalent à (E).
   Mettre en évidence que (S) rentre dans le cadre des systèmes conservatifs du cours : préciser les fonctions φ et H (énergie mécanique du système).
   (b) Dessiner les courbes de niveau de H, en déduire le portrait de phases de (S).
   Retrouver le type de portrait de phases à partir de la matrice du système.
   (c) Déterminer les solutions de (E) à partir des racines du polynôme caractéristique de l'équation.

2. On étudie maintenant l'équation différentielle linéaire (oscillateur harmonique amorti)
$$x''(t) = -2x(t) - 3x'(t) \tag{E'}$$
   (a) Soit $v(t) = x'(t)$. Écrire le système différentiel linéaire (S') équivalent à (E').
   (b) Montrer que la fonction H de 1.(a) (qui représente toujours l'énergie) est décroissante le long des trajectoires de (S') (système dissipatif).
   Quel est alors le lien entre ces trajectoires et les courbes de niveau de (H) ?
   Que peut-on conjecturer sur la nature du point d'équilibre ?
   (c) Déterminer le type de portrait de phases de (S') à partir de sa matrice et valider la conjecture.
   (d) Préciser les solutions de (E') (amortissement fort).

5.4. (Oscillateur harmonique plan)
Soit $X(t) = (x_1(t), x_2(t)) \in \mathbb{R}^2$ la position d'un point matériel de masse m évoluant dans le champ de forces $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par $F(X) = -kX$ ($k > 0$). On a alors

$$X''(t) = -\frac{k}{m} X(t) \tag{E}$$

Soit $V(t) = (v_1(t), v_2(t)) = X'(t)$.

1. Déterminer une fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que l'équation (E) soit équivalente au système différentiel conservatif dans $\mathbb{R}^4$
$$\begin{cases} X'(t) = V(t) \\ V'(t) = -\operatorname{grad} \varphi(X(t)) \end{cases} \tag{SC}$$
2. Écrire explicitement les quatre équations de (SC).
3. Soit $H : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$H(x_1, x_2, v_1, v_2) = H(X, V) = \frac{||V||^2}{2} + \varphi(X)$$
Déterminer $H(x_1, x_2, v_1, v_2)$ et montrer que la fonction H est une intégrale première de (SC).
4. Déterminer les points d'équilibre du système (SC), préciser leur nature.

5.5. Soit le système différentiel
$$\begin{cases} x_1'(t) = v_1(t) \\ x_2'(t) = v_2(t) \\ v_1'(t) = -x_1(t) - 2x_1(t)x_2(t) \\ v_2'(t) = -x_2(t) - x_1^2(t) + x_2^2(t) \end{cases} \tag{S}$$

1. Montrer que (S) s'écrit sous la forme
$$\begin{cases} X'(t) = V(t) \\ V'(t) = -\operatorname{grad} \varphi(X(t)) \end{cases}$$
où $X(t) = (x_1(t), x_2(t))$, $V(t) = (v_1(t), v_2(t))$ et $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction que l'on déterminera.
2. En déduire une intégrale première du système (S).
3. Déterminer les points d'équilibre de (S). Étudier la nature de l'origine.

6. Exercice supplémentaire : bifurcation de Hopf

Pour tout $\mu \in \mathbb{R}$ considérons le système différentiel
$$\begin{cases} x'(t) = \mu x(t) - y(t) - x(t)\left(x^2(t) + y^2(t)\right) \\ y'(t) = x(t) + \mu y(t) - y(t)\left(x^2(t) + y^2(t)\right) \end{cases} \tag{S_μ}$$

1. Linéariser (S_μ) au point d'équilibre $(0, 0)$. En déduire sa nature si $\mu \neq 0$.
2. Montrer que, en coordonnées polaires, le système (S_μ) s'écrit
$$\begin{cases} \rho'(t) = \mu\rho(t) - \rho^3(t) \\ \theta'(t) = 1 \end{cases}$$
(procéder comme dans la question 3 de l'exercice 4.3).
3. Tracer le diagramme de bifurcation de la famille d'équations $\rho'(t) = \mu\rho(t) - \rho^3(t)$.
4. Donner l'allure des portraits de phases de la famille (S_μ).
Que remarque-t-on lorsque le paramètre μ traverse la valeur $\mu = 0$?