

Université Paris – Saclay
Parcours élève ingénieur Polytech
2020 – 2021

Mathématiques S3
Notes de Cours

Chapitre 7 : Théorie qualitative des systèmes
différentiels

José Montesinos
jose.montesinos@universite-paris-saclay.fr

Chapitre 7

Théorie qualitative des systèmes différentiels

7.1 Introduction

Ce chapitre est une introduction aux systèmes dynamiques.

Vous trouverez dans www.chaos-math.org un très beau film sur ce sujet.

7.1.1 Systèmes différentiels autonomes du premier ordre

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Considérons le système différentiel du premier ordre

$$X'(t) = f(X(t)) \tag{S}$$

Une **solution** du système est une fonction $X : I \rightarrow \Omega$, qu'on notera

$$X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

définie sur un intervalle ouvert I , dérivable en tout point de I et vérifiant, pour tout $t \in I$,

$$X'(t) = (x'_1(t), x'_2(t), \dots, x'_n(t)) = f((x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)))$$

| *Les solutions de (S) sont les courbes paramétrées de Ω dont les vecteurs vitesse sont donnés par le champ de vecteurs sur $\Omega : X \rightarrow f(X)$.*

Comme f ne dépend pas de la variable t , on dit que le système est **autonome**.

Il n'y a pas de contrainte sur t dans l'équation (S) :

| *Une solution **globale** de (S) est une solution définie sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$.*

On ne sera pas dépaycé par les définitions suivantes

| *Si $X_1 : I_1 \rightarrow \Omega$ et $X_2 : I_2 \rightarrow \Omega$ sont deux solutions de (S) telles que I_1 est contenu strictement dans I_2 et $X_1(t) = X_2(t)$ pour tout $t \in I_1$, on dira que $X_2 : I_2 \rightarrow \Omega$ **prolonge** $X_1 : I_1 \rightarrow \Omega$.*

| *Une solution de (S) est **maximale** s'il n'existe pas d'autre solution de (S) qui la prolonge.*

Voici des solutions évidentes (et très importantes) de (S)

Si le point $X_0 \in \Omega$ vérifie $f(X_0) = 0$, alors la fonction constante $X : t \rightarrow X_0$ est solution de (S) sur \mathbb{R} .

On dit que X_0 est un **point d'équilibre** du système différentiel (S) .

Exemples

1. Si $n = 1$, (S) est une équation différentielle autonome (voir Sect. 5.2).

2. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est définie par $f(X) = A \cdot X$, alors (S) définit un système différentiel linéaire homogène (voir Ch. 6).

3. Comme nous avons vu dans la Sect. 6.5, à partir d'une équation différentielle linéaire **homogène**

$$x^{(n)}(t) = a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1x'(t) + a_0x(t)$$

en introduisant les fonctions inconnues auxiliaires

$$x_1(t) = x(t), \quad x_2(t) = x'(t), \quad \dots, \quad x_{n-1}(t) = x^{(n-2)}(t), \quad x_n(t) = x^{(n-1)}(t)$$

on obtient un système différentiel linéaire **homogène**

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}'(t) \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Par exemple, à partir de l'équation de l'oscillateur harmonique non amorti

$$x''(t) = -\omega^2 x(t)$$

on obtient, en introduisant l'inconnue $y(t) = x'(t)$, le système 2×2

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Nous reviendrons sur cette équation dans la Sect 7.2.5.

4. De manière analogue, à partir d'une équation différentielle autonome d'ordre n

$$x^{(n)}(t) = g(x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) \quad (E)$$

le même changement de fonctions inconnues

$$x_1(t) = x(t), \quad x_2(t) = x'(t), \quad \dots, \quad x_{n-1}(t) = x^{(n-2)}(t), \quad x_n(t) = x^{(n-1)}(t)$$

transforme (E) en un système différentiel

$$\begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ \vdots \\ x'_{n-1}(t) \\ x'_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \\ g(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \end{pmatrix}$$

Par exemple, considérons l'équation du pendule simple non amorti (que nous étudierons dans la Sect. 7.7)

$$\theta''(t) = -\frac{g}{l} \sin \theta(t)$$

Si $x(t) = \theta(t)$ et $y(t) = \theta'(t)$ on obtient le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = & y(t) \\ y'(t) = -\frac{g}{l} \sin x(t) \end{cases}$$

5. Les systèmes différentiels dans \mathbb{R}^n obtenus à partir d'équations différentielles autonomes d'ordre n ne sont pas les seuls exemples qui apparaissent dans les applications. Citons par exemple les systèmes hamiltoniens en mécanique ou le système de Lotka-Volterra qui modélise la dynamique prédateur-proie en écologie.

Problème de Cauchy

On dispose du résultat suivant

Théorème 7.1.1 (Cauchy-Lipschitz)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 .

Alors, pour tous $t_0 \in \mathbb{R}$ et $X_0 \in \mathbb{R}^n$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = f(X(t)) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

admet une unique solution maximale.

Remarques

1. Nous savons que, en général, la solution n'est pas globale : l'équation autonome $x'(t) = 1 + x^2(t)$ n'admet aucune solution globale (voir Sect. 5.4, Remarque 2).

2. Rappelons aussi que dans le cas particulier d'un système linéaire homogène $X'(t) = AX(t)$, la solution maximale de tout problème de Cauchy est globale : définie sur \mathbb{R} tout entier (voir Th. 6.3.1 et Sect. 6.4).

Le Théorème des bouts (Compléments)

Nous présentons à l'attention des étudiants plus motivés l'énoncé du Th. des bouts pour le système (S) et un Corollaire facile à retenir.

Rappelons que les solutions globales du système (S) sont celles définies sur \mathbb{R} tout entier. Que peut-on dire d'une solution maximale non globale? Voici une réponse :

Théorème 7.1.2 (Th. des bouts)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 .

Soit $X :]t_1, t_2[\rightarrow \Omega$ une solution maximale du système différentiel

$$X'(t) = f(X(t))$$

1. Si $t_2 < +\infty$, alors $t \rightarrow X(t)$ « sort de tout compact » $K \subset \Omega$ lorsque $t \rightarrow t_2^-$, c'est-à-dire que pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $\tau \in]t_1, t_2[$ tel que

$$X(t) \in \Omega - K$$

pour tout $t \in]\tau, t_2[$.

2. De même, si $-\infty < t_1$, alors $t \rightarrow X(t)$ sort de tout compact $K \subset \Omega$ lorsque $t \rightarrow t_1^+$.

Remarque

Si $\Omega = \mathbb{R}^n$ la sortie de tout compact lorsque $t \rightarrow t_2^-$ de la partie 1 signifie tout simplement que

$$\lim_{t \rightarrow t_2^-} \|X(t)\| = +\infty$$

De même, la sortie de tout compact lorsque $t \rightarrow t_1^+$ s'écrit $\lim_{t \rightarrow t_1^+} \|X(t)\| = +\infty$.

On parle alors d'explosion en temps fini.

Corollaire 7.1.3 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 .

Soit $X :]t_1, t_2[\rightarrow \Omega$ une solution maximale du système différentiel

$$X'(t) = f(X(t))$$

S'il existe un compact $K \subset \Omega$ et $\tau \in]t_1, t_2[$ tels que $X(t) \in K$ pour tout $t \in]\tau, t_2[$, alors $t_2 = +\infty$.

De même, si $X(t) \in K$ pour tout $t \in]t_1, \tau[$, alors $t_1 = -\infty$.

7.1.2 Trajectoires. Portrait de phases

Définition 7.1.4 Soit $X : I \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$ une solution maximale du système différentiel

$$X'(t) = f(X(t)) \quad (S)$$

Le sous-ensemble de Ω

$$X(I) = \{ X(t) \mid t \in I \}$$

orienté dans le sens croissant de la variable t , est une **trajectoire** du système (S)

Ainsi, une trajectoire d'un système différentiel est l'ensemble des positions prises par une solution maximale. C'est une « courbe » dans l'ouvert Ω dont on a « oublié la paramétrisation », ne gardant que l'orientation.

Les trajectoires sont tangentes au champ de vecteurs $X \rightarrow f(X)$ (voir Fig. 7.3 et 7.4).

Définition 7.1.5 Le **portrait de phases** d'un système différentiel est l'ensemble des trajectoires (orientées) du système

Remarques

1. Ne pas confondre la trajectoire $X(I)$ avec le graphe de la solution $X : I \rightarrow \Omega$, qui est le sous-ensemble de $\mathbb{R} \times \Omega$ défini par

$$\{ (t, X(t)) \mid t \in I \}$$

2. Si X_0 est un point d'équilibre du système ($f(X_0) = 0$), alors $\{X_0\}$ est une trajectoire de (S) (elle correspond à la solution constante $t \rightarrow X_0$).

Exemple 1

Considérons l'équation différentielle

$$x'(t) = \frac{1}{5}x(t) \quad (E)$$

Il s'agit d'un cas particulier de système (S) : $n = 1$, $\Omega = \mathbb{R}$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x/5$.

Les solutions maximales de (E) sont les fonctions $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$x(t) = Ce^{t/5}$$

pour tout $C \in \mathbb{R}$. On peut tracer les graphes des solutions dans le repère Otx du plan et visualiser les trajectoires de (E) comme des sous-ensembles de l'axe Ox (voir Figure 7.1) :

1. Si $C = 0$, $x(\mathbb{R}) = \{0\}$: la trajectoire correspondante est l'origine de l'axe Ox (le seul point d'équilibre de (E)).

2. Pour tout $C > 0$, $x(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$. Les trajectoires données par toutes ces solutions sont identiques : il s'agit de la demi-droite « positive » de l'axe Ox orientée vers $+\infty$.
3. Si $C < 0$ on a $x(\mathbb{R}) =]-\infty, 0[$ et on obtient une seule et même trajectoire : la demi-droite « négative » de l'axe Ox orientée vers $-\infty$.

Il n'y a donc que trois trajectoires pour l'équation (E).

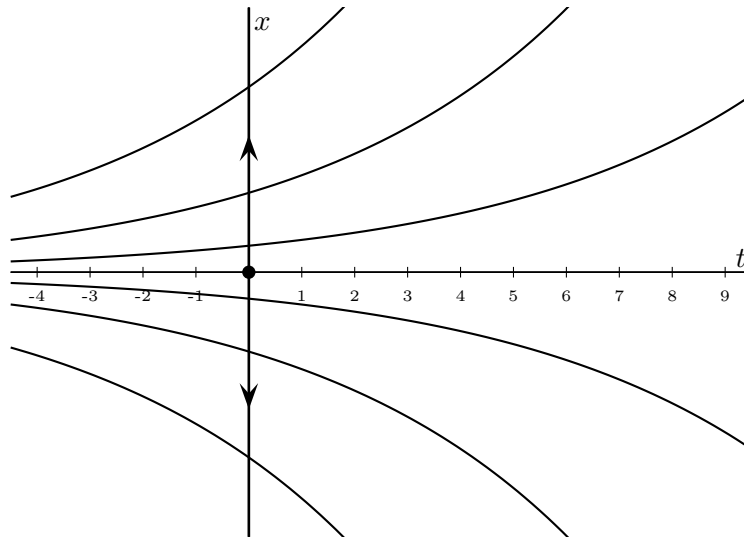


FIGURE 7.1 – Les graphes des solutions de l'équation $x'(t) = 1/5x(t)$ et son portrait de phases (sur l'axe Ox).

Exemple 2.

Soit λ un réel non nul et considérons le système différentiel

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Les solutions maximales sont définies sur \mathbb{R} par $(x(t), y(t)) = e^{\lambda t}(C_1, C_2)$ pour tous $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

L'origine est le seul point d'équilibre du système. La solution correspondante est obtenue pour $C_1 = C_2 = 0$.

Soit $(C_1, C_2) \neq (0, 0)$ fixé, lorsque t parcourt \mathbb{R} , le réel $e^{\lambda t}$ décrit l'intervalle $]0, +\infty[$ (dans le sens croissant si $\lambda > 0$, décroissant si $\lambda < 0$) : la trajectoire correspondante à cette solution est la demi-droite issue de l'origine passant par (C_1, C_2) (orientée vers l'infini si $\lambda > 0$ ou vers l'origine si $\lambda < 0$).

La Figure 7.2 illustre le portrait de phases du système.

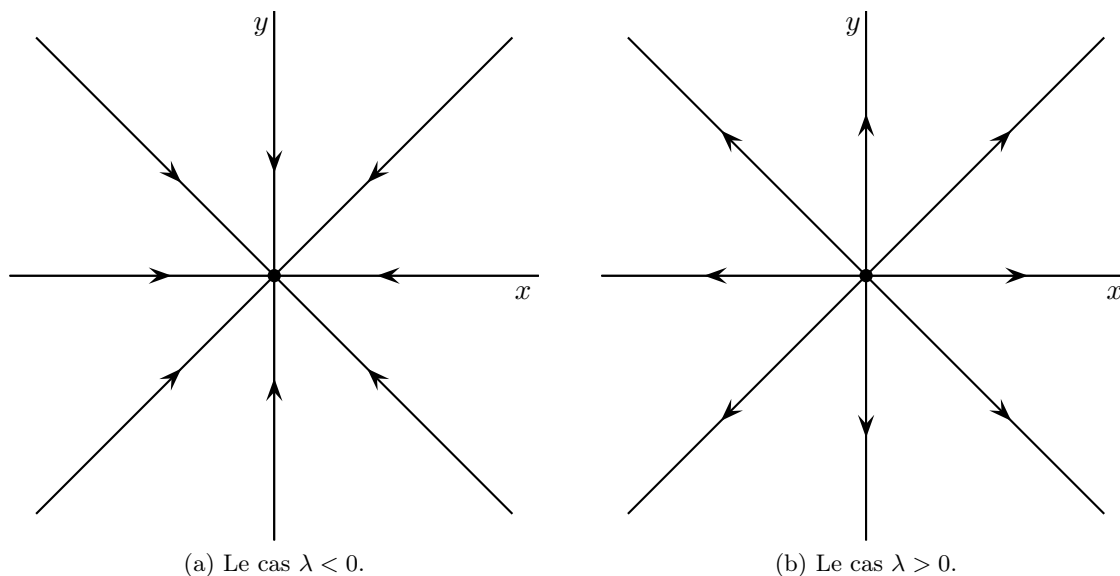


FIGURE 7.2 – Portrait de phases du système différentiel de matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \neq 0$.

Deux solutions portées par la même trajectoire diffèrent d’une translation du temps

On montre, comme pour les équations différentielles autonomes (Prop. 5.2.1), que

Si $X : I \rightarrow \Omega$ est une solution maximale de (S) alors, pour tout $c \in \mathbb{R}$, la fonction

$$X_c : I + c \rightarrow \Omega$$

définie sur l’intervalle $I + c = \{x + c \mid x \in I\}$ par $X_c(t) = X(t - c)$, est aussi solution maximale de (S) .

Les solutions $t \rightarrow X(t)$ et $t \rightarrow X_c(t)$ diffèrent d’une translation du temps et elles originent la même trajectoire

$$X(I) = X_c(I + c)$$

La réciproque est vraie

Proposition 7.1.6 Soient $X_1 : I_1 \rightarrow \Omega$ et $X_2 : I_2 \rightarrow \Omega$ deux solutions maximales de (S) telles que leurs trajectoires correspondantes sont identiques

$$X_1(I_1) = X_2(I_2)$$

Alors elles diffèrent d’une translation du temps

Démonstration : Soit $T = X_1(I_1) = X_2(I_2)$ et $V \in T$.
 Il existe $t_1 \in I_1$ et $t_2 \in I_2$ tels que $X_1(t_1) = X_2(t_2) = V$.
 Soit $\tau = t_2 - t_1$, montrons que

$$X_2(t + \tau) = X_1(t)$$

pour tout $t \in I_1$. En effet, soit $X_3 : I_2 - \tau \rightarrow \Omega$ définie par

$$X_3(t) = X_2(t + \tau)$$

Il s'agit d'une solution maximale du système car elle est définie à partir de la solution X_2 par une translation du temps. On a

$$X_3(t_1) = X_2(t_1 + \tau) = X_2(t_2) = V = X_1(t_1)$$

Ainsi X_1 et X_3 sont deux solutions maximales du même problème de Cauchy pour (S) et le Th. de Cauchy-Lipschitz (Th. 7.1.1) implique

$$I_2 - \tau = I_1 \quad \text{et} \quad X_3(t) = X_1(t)$$

pour tout $t \in I_1$ □

Exercice. Vérifier explicitement l'énoncé de la proposition dans les Exemples 1 et 2.

Les trajectoires du système (S) forment une partition de Ω

Proposition 7.1.7 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Considérons le système différentiel

$$X'(t) = f(X(t)) \tag{S}$$

Alors

1. La réunion des trajectoires du système est Ω .
2. Deux trajectoires de (S) sont ou bien identiques ou bien disjointes.

On récapitule ces propriétés en disant que les trajectoires du système (S) forment une **partition** de Ω .

Démonstration :

1. C'est une conséquence du Th de Cauchy-Lipschitz : si $V \in \Omega$, il existe une solution maximale $X : I \rightarrow \Omega$ de (S) vérifiant $X(0) = V$ et V appartient à la trajectoire $X(I)$. Ainsi Ω est contenu dans la réunion des trajectoires (l'autre inclusion est évidente).

2. Soient T_1 et T_2 deux trajectoires de (S) : $T_i = X_i(I_i)$ avec $X_i : I_i \rightarrow \Omega$ solution maximale. Supposons que $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$ et montrons que $T_1 = T_2$.

Soit $V \in T_1 \cap T_2$: il existe $t_1 \in I_1$ et $t_2 \in I_2$ tels que $X_1(t_1) = X_2(t_2) = V$. La preuve de la Prop 7.1.6 montre alors que si $\tau = t_2 - t_1$ alors $I_1 + \tau = I_2$ et

$$X_1(t) = X_2(t + \tau)$$

pour tout $t \in T_1$. En particulier $T_1 = X_1(I_1) = X_2(I_2) = T_2$. □

Remarque

Un résultat d'existence et unicité de solution maximale pour le problème de Cauchy est essentiel pour établir les deux propositions précédentes. Considérons par exemple l'équation

$$x'(t) = 2\sqrt{|x(t)|}$$

que nous avons présentée dans la Sect. 5.3 comme exemple de non unicité pour le problème de Cauchy.

Comme dans l'Exemple 1, nous pouvons utiliser la Fig. 5.3 pour visualiser ensemble les graphes des solutions maximales dans le plan Otx et le portrait de phases sur l'axe Ox . Les trajectoires sont $\{0\}$, $] -\infty, 0]$, $[0, +\infty [$ et \mathbb{R} (orientées dans le sens croissant de x) : elles ne sont pas disjointes ! On peut trouver aussi des solutions portées par la trajectoire \mathbb{R} qui ne diffèrent pas d'une translation du temps.

Quelques remarques sur les trajectoires des systèmes différentiels linéaires

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et considérons le système différentiel linéaire homogène

$$X'(t) = AX(t) \tag{SL}$$

- Points d'équilibre de (SL)

Nous savons que tout point d'équilibre d'un système différentiel est une trajectoire du système.

L'ensemble des points d'équilibre de (SL) est

$$\ker A = \{ X \in \mathbb{R}^n \mid AX = 0 \}$$

Ainsi (SL) admet

1. Ou bien un seul point d'équilibre (l'origine), ce qui correspond à $\text{rang}(A) = n$.
2. Ou bien une infinité (si $\text{rang}(A) < n$, alors $\dim \ker A = n - \text{rang}(A) > 0$).

- Trajectoires rectilignes de (SL)

On sait que si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A et $V \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre associé à λ alors la fonction $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$X(t) = e^{\lambda t}V$$

est solution de (SL) (voir Sect. 6.4).

Si $\lambda = 0$, alors V est un point d'équilibre du système.

Si $\lambda \neq 0$, la trajectoire correspondante à la solution X est

$$X(\mathbb{R}) = \{ \alpha V \mid \alpha > 0 \}$$

c'est-à-dire la demi-droite issue de l'origine O de vecteur directeur V , orientée vers O si $\lambda < 0$, vers « l'infini » si $\lambda > 0$ (raisonner comme dans l'Exemple 2).

Comme $-V$ est aussi vecteur propre associé à λ , on trouve parmi les trajectoires de (SL) la demi-droite opposée

$$\{ \alpha(-V) \mid \alpha > 0 \}$$

(l'orientation dépend du signe de λ).

- (Compléments) L'image d'une trajectoire de (SL) par une homothétie de centre l'origine est encore une trajectoire

Soit $k \in \mathbb{R}$ et $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'homothétie de centre O et rapport $k : H(V) = kV$.

On sait (Sect. 6.2) que si $X_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une solution de (SL) alors la fonction $X_2(t) = kX_1(t) = H(X_1(t))$ est aussi solution du système sur \mathbb{R} .

En particulier, si $T_1 = X_1(\mathbb{R})$ et $T_2 = X_2(\mathbb{R})$, on a $H(T_1) = T_2$ (de plus, H conserve l'orientation des trajectoires)

Quelques exemples de portraits de phases de systèmes linéaires

Exemple 3. (Voir Fig. 7.3) Soit le système différentiel $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

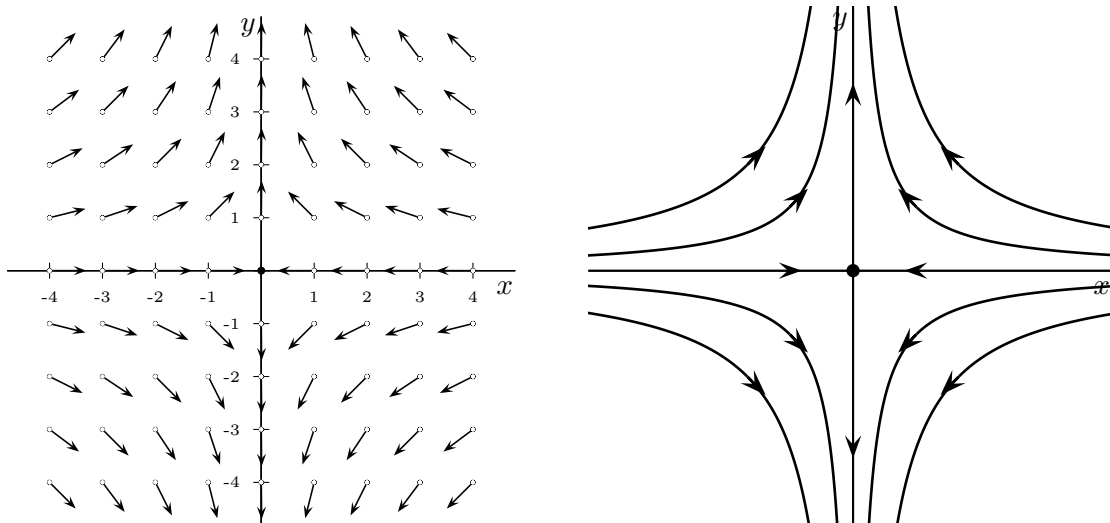
Le champ de vecteurs du système est $(x, y) \rightarrow f(x, y) = (-x, y)$. Pour mieux le visualiser, on peut représenter le champ de vecteurs $(x, y) \rightarrow \ell f(x, y) / \|f(x, y)\|$, de norme constante $\ell > 0$, pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$ (Fig. 7.3 a).

Les solutions maximales sont définies sur \mathbb{R} par $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, pour tous $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. L'origine est le seul point d'équilibre du système.

Les trajectoires rectilignes sont les quatre demi-droites issues de l'origine sur les axes Ox et Oy (elles correspondent aux solutions avec $C_2 = 0$ et $C_1 = 0$ respectivement).

Sur l'axe Ox elles sont orientées vers l'origine, sur Oy vers l'infini.

Si $C_1 \neq 0$ et $C_2 \neq 0$, les solutions correspondantes $x(t)$ et $y(t)$ ne changent pas de signe et $x(t)y(t) = C_1 C_2$ est constante : la trajectoire est l'une des quatre branches de l'hyperbole $xy = C_1 C_2$ (les signes de C_1 et C_2 déterminent le quadrant). La Fig. 7.3 b) donne l'allure des trajectoires.



(a) Champ de vecteurs (de norme constante) défini à partir du champ de vecteurs du système.

(b) Portrait de phases du système

FIGURE 7.3 – Exemple 3

Exemple 4. (Voir Fig. 7.4)

Considérons le système différentiel

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Le seul point d'équilibre est l'origine.

Le champ de vecteurs

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

est le champ des vecteurs vitesse des solutions. Il vérifie

$$\langle (x, y), f(x, y) \rangle = 0$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On voit alors géométriquement que les cercles centrés en O et orientés dans le sens trigonométrique sont les autres trajectoires du système.

Nous avons trouvé explicitement les solutions maximales à valeurs réelles (voir Exemple 2 de la Sect 6.4.1) :

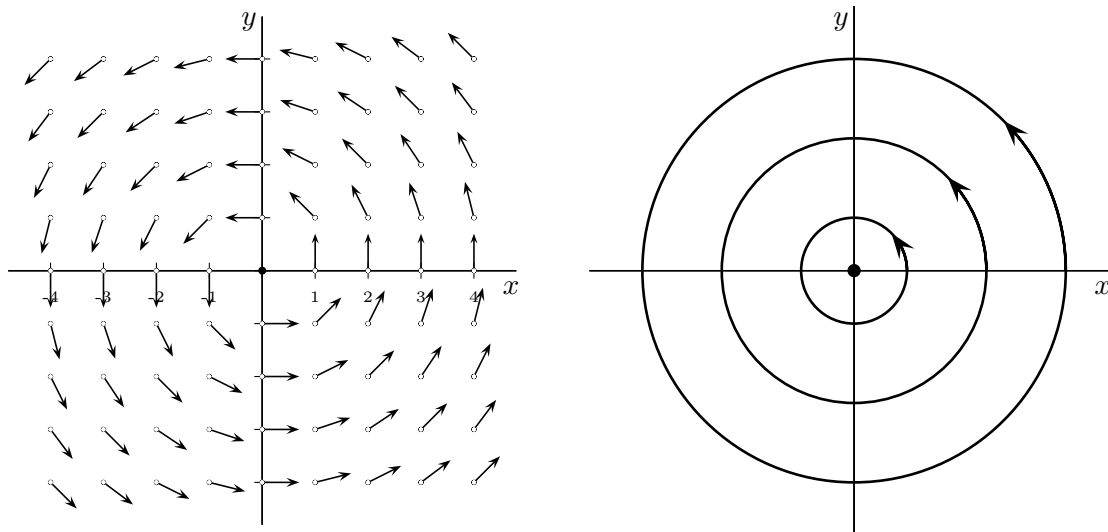
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

pour tous $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Soit $(C_1, C_2) \neq (0, 0)$ fixé. En écrivant $(C_1, C_2) = \rho(\cos \tau, \sin \tau)$, avec $\rho > 0$ et $\tau \in [0, 2\pi[$, on obtient

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \rho \cos \tau \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + \rho \sin \tau \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos(t + \tau) \\ \sin(t + \tau) \end{pmatrix}$$

et la trajectoire correspondante est bien le cercle de centre O et rayon ρ orienté dans le sens direct. Comme le prévoit la théorie générale, on voit que toutes les solutions qui originent la même trajectoire (ρ constant) diffèrent d'une translation du temps.



(a) Champ de vecteurs (de norme constante) défini à partir du champ de vecteurs du système.

(b) Portrait de phases du système.

FIGURE 7.4 – Exemple 4.

7.1.3 Flot d'un système différentiel (Compléments)

Soit $X_0 \in \Omega$ et $X : I_{X_0} \rightarrow \Omega$ la solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = f(X(t)) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

L'intervalle ouvert I_{X_0} contient 0 et $I_{X_0} = \mathbb{R}$ si la solution est globale. On notera

$$\Phi(t, X_0) = X(t)$$

Ceci définit une application Φ sur une partie de $\mathbb{R} \times \Omega$ (la réunion des ensembles $I_{X_0} \times \{X_0\}$ lorsque $X_0 \in \Omega$) à valeurs dans Ω , elle s'appelle le **flot** du système différentiel (S).

On retiendra que

Dans le cas où toute solution maximale de (S) est globale (définie sur \mathbb{R}) alors Φ , le flot du système, est défini sur $\mathbb{R} \times \Omega$:

$$\Phi : \mathbb{R} \times \Omega \longrightarrow \Omega$$

(il est en particulier ainsi pour le système différentiel linéaire défini sur $\Omega = \mathbb{R}^n$ à partir de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $X'(t) = AX(t)$).

Pour tout $(t, X) \in \mathbb{R} \times \Omega$, la valeur $\Phi(t, X)$ est la position à l'instant t de la solution maximale du système (S) qui passe par X à l'instant 0.

($t \rightarrow \Phi(t, X)$ est donc cette solution).

Il sera parfois utile de noter $\Phi(t, X) = \Phi_t(X)$.

A partir de la définition, on a directement $\Phi(0, X) = X$ pour tout $X \in \Omega$.

Autrement dit $\Phi_0 : \Omega \rightarrow \Omega$ est l'application identité.

Exemples

1. Les solutions maximales de l'équation

$$x'(t) = 3x(t) \tag{E}$$

sont les fonctions définies sur \mathbb{R} par $x(t) = Ce^{3t}$.

Puisque $x(0) = C$, la solution qui passe par x à l'instant $t = 0$ est $t \rightarrow xe^{3t}$ et le flot de (E) est l'application $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\Phi(t, x) = xe^{3t}$$

2. Les solutions maximales du système différentiel

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

sont les fonctions définies sur \mathbb{R} par

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pour tous $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. On remarque que $(x(0), y(0)) = (C_1, C_2)$: la solution passant par (x, y) à l'instant 0 s'écrit

$$t \longrightarrow xe^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + ye^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et le flot du système est l'application $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\Phi(t, (x, y)) = xe^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + ye^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

3. Les solutions maximales du système différentiel

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

sont (voir l'Exemple 1 de la Sect. 6.4.1) :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \alpha e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{5t} \\ -e^{3t} & -3e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Pour déterminer le flot $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ du système, nous devons identifier $t \rightarrow \Phi(t, (x, y))$: la solution passant par (x, y) à l'instant 0, remarquons que

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$$

et le flot est donné par

$$\Phi(t, (x, y)) = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{5t} \\ -e^{3t} & -3e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

7.1.4 Point d'équilibre stable, asymptotiquement stable

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Considérons le système différentiel

$$X'(t) = f(X(t)) \tag{S}$$

Soit $X_0 \in \Omega$ un point d'équilibre du système.

Définition 7.1.8 On dit que X_0 est un point d'équilibre **stable** de (S) si Pour toute boule ouverte $B_\epsilon(X_0) \subset \Omega$, il existe une boule ouverte $B_\delta(X_0) \subset B_\epsilon(X_0)$ telle que, pour tout $X \in B_\delta(X_0)$:

1. $\Phi(t, X)$ est défini pour tout $t \geq 0$.
2. $\Phi(t, X) \in B_\epsilon(X_0)$ pour tout $t \geq 0$.

On dit que le point d'équilibre X_0 est **instable** s'il n'est pas stable : c'est-dire qu'il existe une boule ouverte $B_\epsilon(X_0) \subset \Omega$ telle que, pour toute boule ouverte $B_\delta(X_0) \subset B_\epsilon(X_0)$ on peut trouver $X \in B_\delta(X_0)$ et $t > 0$ tels que $\Phi(t, X) \notin B_\epsilon(X_0)$.

Définition 7.1.9 Le point d'équilibre X_0 est **attractif** (respectivement **répulsif**) s'il existe une boule ouverte $B_\eta(X_0) \subset \Omega$ telle que, pour tout $X \in B_\eta(X_0)$

1. $\Phi(t, X)$ est défini pour tout $t \geq 0$ (resp. $t \leq 0$).
2. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi(t, X) = X_0$ (resp. $\lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi(t, X) = X_0$)

On dit qu'un point d'équilibre est **asymptotiquement stable** s'il est **stable et attractif**.

Exemples

Revisitons les exemples de la section 7.1.2 :

Dans l'Exemple 1, l'origine est un point d'équilibre instable et répulsif.

Dans l'Exemple 2, l'origine est asymptotiquement stable si $\lambda < 0$, instable et répulsif si $\lambda > 0$.

Dans l'Exemple 3, l'origine est instable, il n'est pas attractif ni répulsif.

Enfin, dans l'Exemple 4, l'origine est stable, il n'est ni attractif ni répulsif.

Remarque

On notera (Exemple 4) que : X_0 **stable n'implique pas** X_0 **attractif**.

De même, on peut exhiber des exemples pour montrer que : X_0 **attractif n'implique pas** X_0 **stable** (la condition $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi(t, X) = X_0$ n'implique pas que $\Phi(t, X)$ reste proche de X_0 pour **tout** $t \geq 0$).

7.1.5 Lien entre les systèmes différentiels de matrice A et $P^{-1}AP$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Considérons le système différentiel linéaire

$$X'(t) = AX(t) \tag{S1}$$

Rappelons la technique du changement d'inconnue que nous avons utilisé dans la Sect 6.4. Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Le changement de coordonnées

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P^{-1}X$$

induit le changement de fonction inconnue

$$\tilde{X}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \vdots \\ \tilde{x}_n(t) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X(t)$$

Si $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une solution de (S1) et $\tilde{X}(t) = P^{-1}X(t)$, en remarquant que

$$X'(t) = \left(P\tilde{X}(t) \right)' = P\tilde{X}'(t)$$

on a pour tout $t \in \mathbb{R}$ les équivalences

$$X'(t) = AX(t) \Leftrightarrow P\tilde{X}'(t) = AP\tilde{X}(t) \Leftrightarrow \tilde{X}'(t) = P^{-1}AP\tilde{X}(t) \quad (*)$$

Dans les applications, (S1) est un système donné et le nouveau système différentiel

$$\tilde{X}'(t) = P^{-1}AP\tilde{X}(t) \quad (S2)$$

sera plus facile à étudier car sa matrice $P^{-1}AP$ sera plus « simple » (diagonale, triangulaire...).

On s'attache ici à décrire les trajectoires, points d'équilibre et flot du système (S1) à partir des éléments correspondants de (S2).

Les trajectoires de (S1) et (S2)

D'après les équivalences (*), $\tilde{X} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est solution de (S2) si et seulement si $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, définie par $X(t) = P\tilde{X}(t)$, est solution de (S1).

Considérons f_P , l'endomorphisme de \mathbb{R}^n associé à la matrice P ,

$$f_P : \tilde{X} \rightarrow P\tilde{X}$$

ainsi que les trajectoires $T = \{ X(t) \mid t \in \mathbb{R} \}$ de (S1) et $\tilde{T} = \{ \tilde{X}(t) \mid t \in \mathbb{R} \}$ de (S2).

Comme $X(t) = f_P(\tilde{X}(t))$, on a $T = f_P(\tilde{T})$:

| Les trajectoires du système différentiel de matrice A sont les images par l'endomorphisme associé à P des trajectoires du système différentiel de matrice $P^{-1}AP$.

Les points d'équilibre de (S1) et (S2)

| Les points d'équilibre du système différentiel de matrice A sont les images par l'endomorphisme associé à P des points d'équilibre du système différentiel de matrice $P^{-1}AP$.

En effet, $P^{-1}AP\tilde{X}_0 = 0 \Leftrightarrow A(P\tilde{X}_0) = 0$.

De plus

| **Proposition 7.1.10** \tilde{X}_0 est un point d'équilibre stable (respectivement : attractif, répulsif) de $\tilde{X}'(t) = P^{-1}AP\tilde{X}(t)$ si et seulement si $P\tilde{X}_0$ est un point d'équilibre stable (respectivement : attractif, répulsif) de $X'(t) = AX(t)$.

La démonstration est un bon exercice pour se familiariser avec les définitions de point d'équilibre stable, attractif... Elle utilise l'existence de deux réels $0 < \alpha \leq \beta$ tels que

$$\alpha \| X \| \leq \| PX \| \leq \beta \| X \|\quad$$

pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ (voir Corollaire 4.4.3).

Les flots de (S1) et (S2) (Compléments)

Soient $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\tilde{\Phi} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ les flots de (S1) et (S2).

Si $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est la solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = V \end{cases}$$

on a donc, par définition du flot, $\Phi(t, V) = X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Puisque $\tilde{X}(t) = P^{-1}X(t)$ est solution du problème

$$\begin{cases} \tilde{X}'(t) = P^{-1}AP\tilde{X}(t) \\ \tilde{X}(0) = P^{-1}V \end{cases}$$

on a $\tilde{\Phi}(t, P^{-1}V) = \tilde{X}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En résumé

$$\tilde{\Phi}(t, P^{-1}V) = \tilde{X}(t) = P^{-1}X(t) = P^{-1}\Phi(t, V)$$

ou encore

$$\Phi(t, V) = P\tilde{\Phi}(t, P^{-1}V)$$

pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $V \in \mathbb{R}^n$.

Exemple

Revisitons l'Exemple 3 de la section 7.1.3.

Les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

sont semblables : $M = P^{-1}AP$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Le flot $\tilde{\Phi}$ du système $\tilde{X}'(t) = P^{-1}AP\tilde{X}(t)$ est

$$\tilde{\Phi}(t, (\tilde{x}, \tilde{y})) = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$$

Par conséquent, le flot Φ du système $X'(t) = AX(t)$ s'écrit

$$\Phi(t, (x, y)) = P\tilde{\Phi}(t, P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

résultat que nous avons trouvé par un calcul direct.

7.2 Systèmes différentiels linéaires dans le plan

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Nous avons montré (Prop. 2.10. 2) que la matrice A est semblable à une matrice M :

$$M = P^{-1}AP$$

cette matrice étant

- **Cas 1.** Ou bien une matrice diagonale $M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
- **Cas 2.** Ou bien une matrice triangulaire $M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
(c'est le cas si A admet une unique valeur propre réelle et elle n'est pas diagonalisable).
- **Cas 3.** Ou bien une matrice de la forme $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec $b \neq 0$
(c'est le cas si A admet deux valeurs propres non réelles $a - ib, a + ib$).

Comme nous l'avons montré dans la section précédente, pour étudier le système différentiel de matrice A il suffira d'étudier le système différentiel de matrice $M = P^{-1}AP$: les trajectoires du premier sont les images par l'endomorphisme associé à P des trajectoires du deuxième et cet endomorphisme préserve la nature des points d'équilibre.

Les trois sections qui suivent sont consacrées aux trois cas décrits pour la matrice M .

7.2.1 Cas 1. Le système de matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$

Considérons le système différentiel

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Les solutions sont définies pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{\mu t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Comme $C_1 = x(0)$ et $C_2 = y(0)$, le flot du système est $\Phi(t, (x, y)) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Cas 1.1. $\lambda = \mu = 0$

Tout $X \in \mathbb{R}^2$ est point d'équilibre (stable, non asymptotiquement stable) du système.

Cas 1.2. Une valeur propre nulle, une valeur propre non nulle

Supposons par exemple que $\lambda \neq 0, \mu = 0$ (Figure 7.5). La matrice est donc $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Les solutions sont $(x(t), y(t)) = (C_1 e^{\lambda t}, C_2)$.

- Tout point de l'axe Oy est point d'équilibre du système.
- Les autres trajectoires sont les demi-droites horizontales issues des points d'équilibre.

Les points d'équilibre sont

- Instables, si $\lambda > 0$.
- Stables, non asymptotiquement stables, si $\lambda < 0$.

Le cas $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$ est analogue (changer le rôle des axes).

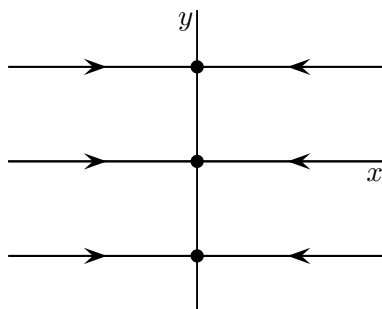


FIGURE 7.5 – Portrait de phases du système de matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $\lambda < 0$.

Cas 1.3. $\lambda = \mu \neq 0$: SOLEIL

La matrice du système est maintenant $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Nous avons déjà étudié ce cas (Exemple 2, Sect. 7.1.2). Voir Fig. 7.6.

Les solutions sont $(x(t), y(t)) = e^{\lambda t}(C_1, C_2)$.

- L'origine est le seul point d'équilibre du système.
- Les autres trajectoires sont les demi-droites issues de l'origine, orientés vers lui si $\lambda < 0$, vers l'infini sinon.
- Si $\lambda < 0$, l'origine est **asymptotiquement stable**, on dit qu'il est un **soleil attractif**.
- Si $\lambda > 0$, l'origine est **instable et répulsif**, on dit que c'est un **soleil répulsif**.

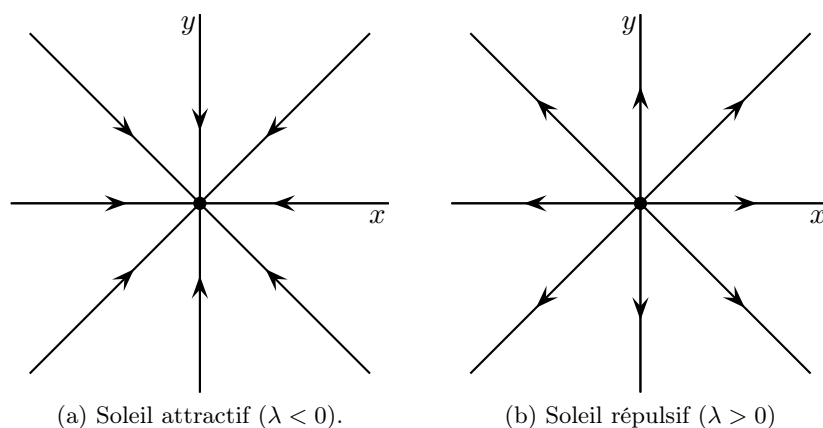


FIGURE 7.6 – Soleil : Système de matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, avec $\lambda \neq 0$.

Cas 1.4. Valeurs propres non nulles de signes contraires : COL

Étudions le système de matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec, par exemple, $\lambda < 0 < \mu$ (Figure 7.7. a)).

Nous avons rencontré ce cas dans l'Exemple 3 de la Sect. 7.1.2.

Les solutions sont $(x(t), y(t)) = (C_1 e^{\lambda t}, C_2 e^{\mu t})$.

- L'origine est le seul point d'équilibre du système.
- Les trajectoires rectilignes du système sont les quatre demi-droites issues de l'origine sur les axes Ox et Oy (elles correspondent aux solutions où seulement l'une des constantes C_i est nulle). Sur l'axe Ox elles sont orientées vers l'origine (puisque $\lambda < 0$), sur Oy vers l'infini ($\mu > 0$).

Fixons maintenant $x(0) = C_1 > 0$ et $y(0) = C_2 > 0$.

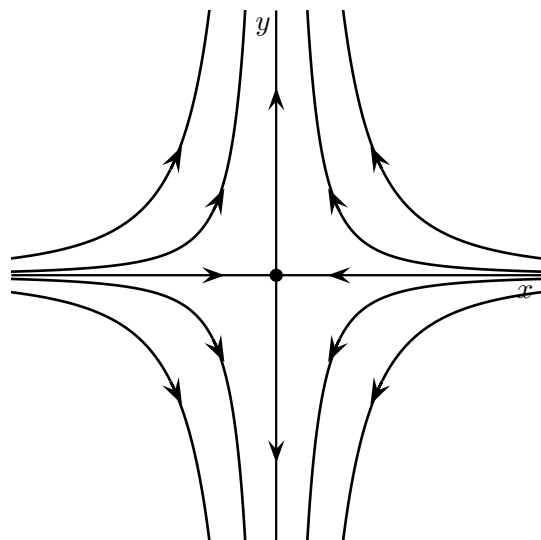
Alors $y(t) = C_2 e^{\mu t} = C_2 (e^{\lambda t})^{\mu/\lambda} = C_2 \left(\frac{x(t)}{C_1}\right)^{\mu/\lambda}$ et la trajectoire correspondante est la partie du premier quadrant du plan d'équation $y = C_2 \left(\frac{x}{C_1}\right)^{\mu/\lambda}$, avec $x \in]0, +\infty[$.

On a $\frac{\mu}{\lambda} < 0$, ce qui détermine l'allure de la trajectoire, en particulier

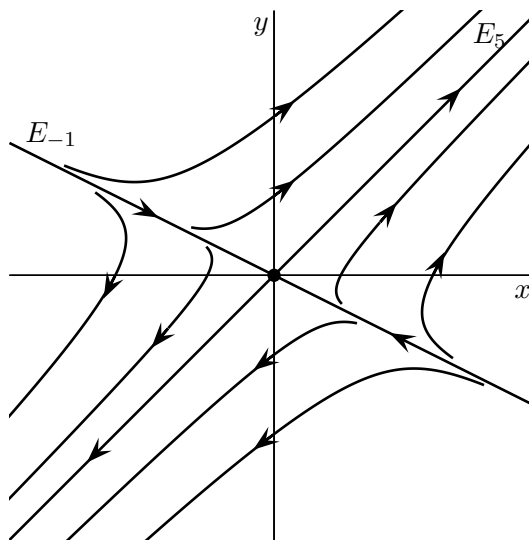
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} C_2 \left(\frac{x}{C_1}\right)^{\mu/\lambda} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} C_2 \left(\frac{x}{C_1}\right)^{\mu/\lambda} = 0$$

Pour l'orientation, remarquer que $x(t) = C_1 e^{\lambda t}$ parcourt l'intervalle $]0, +\infty[$ dans le sens décroissant car $\lambda < 0$.

Les autres cas pour les signes de C_1 et C_2 donnent des trajectoire symétriques (par rapport à Ox , Oy ou O) de celles qu'on vient d'étudier.



(a) Matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.



(b) Matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Les espaces propres sont $E_{-1} = \text{Vect}((-2, 1))$ et $E_5 = \text{Vect}((1, 1))$.

FIGURE 7.7 – Col.

L'origine est instable, ni attractif, ni répulsif. On dit que c'est un **col**.

Le cas $\lambda > 0 > \mu$ est analogue (changer le rôle des axes).

Dans le cas général (voir Fig 7.7 b)), on retiendra que

Pour tracer le portrait de phases du système différentiel de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, possédant deux valeurs propres non nulles de signes contraires $\lambda < 0 < \mu$:

1. *Commencer par dessiner les droites propres de A : elles portent les quatre trajectoires rectilignes du système, qu'on orientera selon les signes des valeurs propres.*
2. *Les deux droites propres sont les asymptotes des trajectoires non rectilignes : on esquisse de manière évidente l'allure de ces trajectoires.*

En effet, on sait que A est semblable à

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

($M = P^{-1}AP$) Par conséquent les trajectoires du système de matrice A sont les images par l'endomorphisme associé à P des trajectoires du système de matrice M .

Cas 1.5. Valeurs propres non nulles, distinctes de même signe : NŒUD

1.5. a) Signe positif : NŒUD REPULSIF

Étudions le système de matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ où, par exemple, $0 < \lambda < \mu$: (Figure 7.8 a))

Les solutions sont $(x(t), y(t)) = (C_1 e^{\lambda t}, C_2 e^{\mu t})$.

- L'origine est le seul point d'équilibre du système.
- Les quatre demi-droites sur les axes coordonnées sont les trajectoires rectilignes du système (elle sont orientées vers l'infini).

Soit $x(0) = C_1 > 0$ et $y(0) = C_2 > 0$. Comme précédemment

$$y(t) = C_2 e^{\mu t} = C_2 \left(e^{\lambda t} \right)^{\mu/\lambda} = C_2 \left(\frac{x(t)}{C_1} \right)^{\mu/\lambda}$$

et la trajectoire correspondante est la partie du premier quadrant du plan d'équation

$$y = y(x) = C_2 \left(\frac{x}{C_1} \right)^{\mu/\lambda} \quad \text{avec } x \in]0, +\infty[$$

Ici, $\frac{\mu}{\lambda} > 1$. Par conséquent

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = 0$ et la trajectoire est tangente à l'axe Ox si $x \rightarrow 0^+$.
2. Elle présente une branche infinie quand $x \rightarrow +\infty$ ($\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty$) qui est une branche parabolique d'axe Oy ($\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x} = +\infty$)

La trajectoire est orientée dans le sens croissant de x puisque $\lambda > 0$.

Les autres cas pour les signes de C_1 et C_2 donnent des trajectoire symétriques (par rapport à Ox , Oy ou O) de celles qu'on vient d'étudier.

L'origine est instable et répulsif. On dit que c'est un **nœud répulsif**.

Si $0 < \mu < \lambda$ l'étude est analogue (changer le rôle des axes).

Cas 1.5. b) Signe négatif : NŒUD ATTRACTIF

Considérons maintenant le système de matrice $M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $\mu < \lambda < 0$ par exemple.

L'allure des trajectoires est celle du cas précédent, mais l'orientation change : les trajectoires sont orientées vers l'origine (il suffit de se ramener au cas 1.5 a) en étudiant le système de matrice $-M$).

On a pour tout $t \geq 0$

$$\|\Phi(t, (x, y))\| = \|(xe^{\lambda t}, ye^{\mu t})\| = \sqrt{x^2 (e^{\lambda t})^2 + y^2 (e^{\mu t})^2} \leq e^{\lambda t} \sqrt{x^2 + y^2} = e^{\lambda t} \|(x, y)\|$$

Ainsi, l'origine est attractif :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi(t, (x, y)) = (0, 0)$$

et stable car

$$\Phi_t(B_\epsilon(O)) \subset B_{e^{\lambda t}\epsilon} \subset B_\epsilon(O)$$

si $t \geq 0$.

En résumé, **l'origine est asymptotiquement stable**, on dit que c'est un **nœud attractif**.

Le cas $\lambda < \mu < 0$ est analogue (changer le rôle des axes).

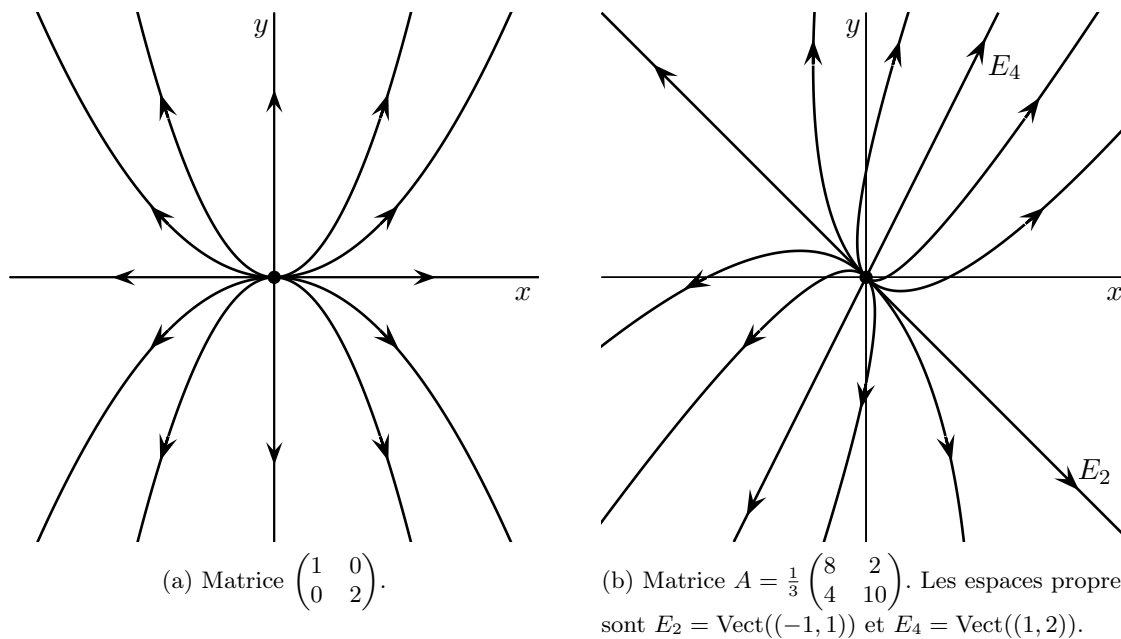


FIGURE 7.8 – Nœud répulsif.

Dans le cas général (Fig. 7.8 b)) on retiendra que

Pour donner l'allure du portrait de phases du système différentiel de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, possédant deux valeurs propres non nuls et de même signe :

1. Commencer par tracer les quatre trajectoires rectilignes du système (sur les deux droites propres de A) et les orienter selon le signe des valeurs propres.
2. Chaque trajectoire non rectiligne est tangente en $(0, 0)$ à la droite propre correspondante à la valeur propre de plus petite valeur absolue (*), elle présente une branche parabolique dont l'axe est l'autre droite propre.

(*) Dans notre présentation des cas 1.5 a) et b), cette droite propre est l'axe Ox .

La justification du résultat est toujours la même : la matrice A est semblable à une matrice M du type étudié dans les cas 1.5 a) et b) : $M = P^{-1}AP$ et les trajectoires du système de matrice A sont les images par l'endomorphisme associé à P des trajectoires du système de matrice M .

7.2.2 Cas 2. Le système de matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Considérons maintenant le système différentiel

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Les solutions sont définies pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t} \\ y(t) = C_2 e^{\lambda t} \end{cases}$$

Pour tous $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Comme $x(0) = C_1$ et $y(0) = C_2$ le flot du système est défini sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ par

$$\Phi(t, (x, y)) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Cas 2.1 $\lambda = 0$ (Figure 7.9)

Les solutions sont $(x(t), y(t)) = (C_1 + C_2 t, C_2)$.

1. Les points d'équilibre du système sont les points de l'axe Ox .
2. Les autres trajectoires du système sont les droites $y = C_2$, pour tout $C_2 \neq 0$.
3. Tous les points d'équilibre sont instables.

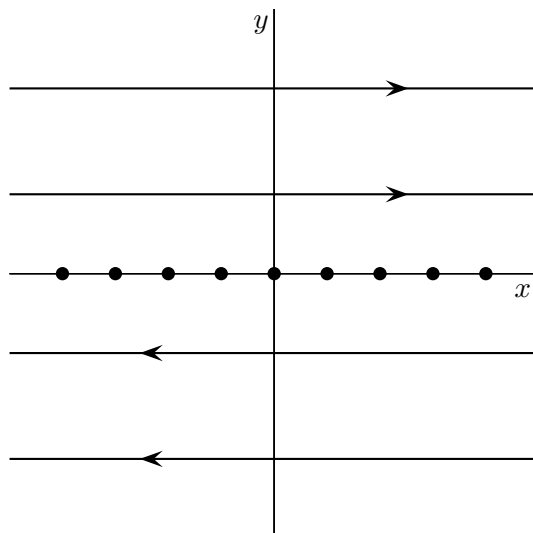


FIGURE 7.9 – Portrait de phases du système de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Cas 2.2 $\lambda \neq 0$. NŒUD IMPROPRE (Figure 7.10)

L'étude des cas $\lambda > 0$ et $\lambda < 0$ est analogue, mais comme le montre la Figure 10, il ne suffit pas d'inverser l'orientation des trajectoires pour passer d'un portrait de phases à l'autre (le champ de vecteurs du système donné par la matrice correspondante à λ n'est pas l'opposé du champ donné par la matrice correspondante à $-\lambda$).

Cas 2.2 a) $\lambda > 0$ NŒUD IMPROPRE REPULSIF

- L'origine est le seul point d'équilibre du système.
- Les deux demi-droites issues de O sur l'axe Ox sont les trajectoires rectilignes du système ($C_2 = 0$). Elles sont orientées vers l'infini.

Fixons maintenant $y(0) = C_2 > 0$ et $x(0) = C_1$.

Puisque $y(t) = C_2 e^{\lambda t}$, il vient $e^{\lambda t} = \frac{y(t)}{C_2}$ et $\lambda t = \ln\left(\frac{y(t)}{C_2}\right)$. Par conséquent,

$$x(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t} = C_1 \frac{y(t)}{C_2} + C_2 \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{y(t)}{C_2}\right) \frac{y(t)}{C_2}$$

et la trajectoire correspondante est la partie du plan d'équation

$$x = x(y) = \left(C_1 + \frac{C_2}{\lambda} \ln\left(\frac{y}{C_2}\right) \right) \frac{y}{C_2} \text{ avec } y \in]0, +\infty[$$

orientée dans le sens croissant de y (car $y(t) = C_2 e^{\lambda t}$ décrit $]0, +\infty[$ dans le sens croissant).

On remarque alors que :

1) La fonction $x = x(y)$ présente une branche infinie si $y \rightarrow +\infty$ ($\lim_{y \rightarrow +\infty} x(y) = +\infty$).

Il s'agit d'une branche parabolique d'axe Ox ($\lim_{y \rightarrow +\infty} x(y)/y = +\infty$).

2) On a $\lim_{y \rightarrow 0^+} x(y) = 0^-$ et la trajectoire est tangente à Ox si $y \rightarrow 0^+$ ($\lim_{y \rightarrow 0^+} x(y)/y = -\infty$).

L'étude si $C_2 < 0$ est analogue.

L'origine est instable et répulsif, on dit que c'est un **nœud impropre répulsif**.

Cas 2.2 b) $\lambda < 0$. NŒUD IMPROPRE ATTRACTIF

L'étude des trajectoires est analogue, l'orientation change : toutes les trajectoires sont orientées vers l'origine. L'origine est donc un point d'équilibre attractif, on peut montrer qu'il est aussi stable (démonstration facile mais un peu technique). On dit que c'est un **nœud impropre attractif**.

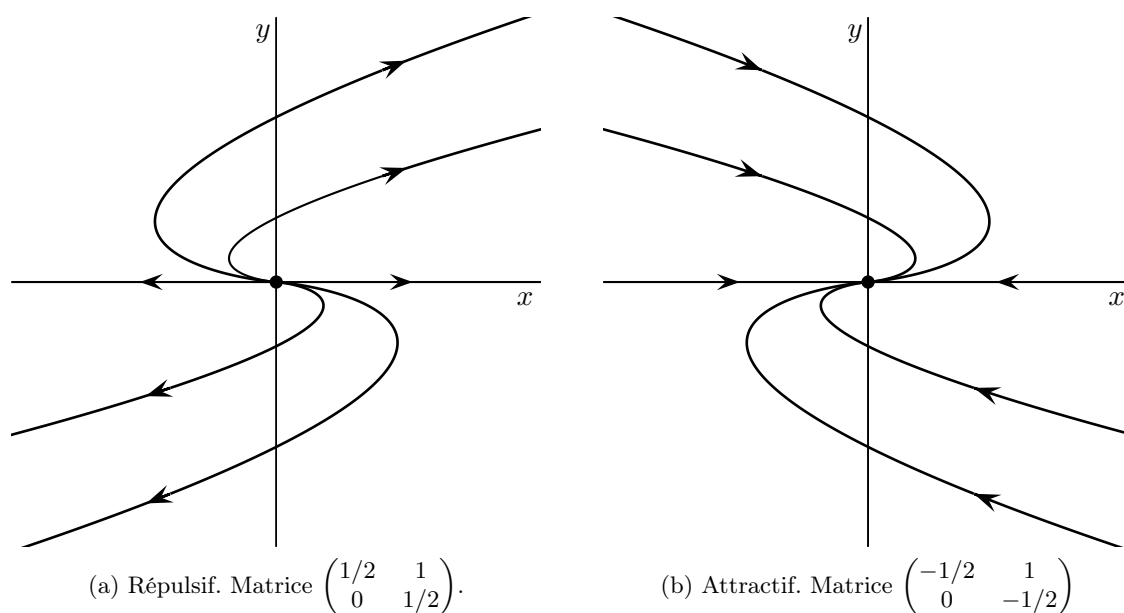


FIGURE 7.10 – Nœud impropre

Dans le cas général :

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ possédant une unique valeur propre $\lambda \neq 0$ mais non diagonalisable, on sait qu'elle est semblable à

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

($M = P^{-1}AP$, $\lambda \neq 0$). Pour tracer le portrait de phases du système de matrice A :

1. Dessiner D , la droite propre de A (elle porte les deux trajectoires rectilignes du système).
2. Les trajectoires non rectilignes sont tangentes en $(0,0)$ à la droite propre D , elles présentent une branche parabolique dont l'axe est cette droite propre.

Pour compléter l'allure du portrait de phases, visualiser le champ de vecteurs du système de matrice A .

7.2.3 Cas 3. Le système de matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $b \neq 0$

Considérons enfin le système différentiel

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

avec $b \neq 0$. Il est utile ici d'identifier le plan \mathbb{R}^2 à \mathbb{C}

$$(x, y) \longleftrightarrow z = x + iy$$

ce qui induit le changement de fonction inconnue

$$(x(t), y(t)) \longleftrightarrow z(t) = x(t) + iy(t)$$

D'après la définition de la dérivée d'une fonction de variable réelle à valeurs complexes, $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$. Par conséquent, notre identification fait correspondre $(x'(t), y'(t))$ à $z'(t)$. Remarquons aussi que

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix} \longleftrightarrow (ax - by) + i(bx + ay) = (a + ib)(x + iy) = (a + ib)z$$

et notre système différentiel s'écrit

$$z'(t) = (a + ib)z(t)$$

Les solutions sont les fonctions $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définies par

$$z(t) = Ke^{(a+ib)t}$$

pour tout $K \in \mathbb{C}$. Si $K = C_1 + iC_2$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} z(t) &= (C_1 + iC_2)e^{at}e^{ibt} = (C_1 + iC_2)e^{at}(\cos bt + i \sin bt) \\ &= \underbrace{e^{at}(C_1 \cos bt - C_2 \sin bt)}_{x(t)} + i \underbrace{e^{at}(C_1 \sin bt + C_2 \cos bt)}_{y(t)} \end{aligned}$$

et les solutions du système sont

$$\begin{cases} x(t) = e^{at}(C_1 \cos bt - C_2 \sin bt) \\ y(t) = e^{at}(C_1 \sin bt + C_2 \cos bt) \end{cases}$$

Puisque $x(0) = C_1$ et $y(0) = C_2$, le flot du système est

$$\Phi(t, (x, y)) = e^{at} \begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longleftrightarrow (x + iy)e^{(a+ib)t}$$

pour tout $(t, (x, y)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$.

Cas 3.1. $a = 0$. CENTRE (Figure 7.11 a))

L'origine est le seul point d'équilibre du système.

En revenant à l'identification $\mathbb{R}^2 \leftrightarrow \mathbb{C}$, les solutions sont

$$z(t) = Ke^{ibt}$$

et les trajectoires du système sont les cercles centrés en $(0, 0)$. Elles sont orientées dans le sens trigonométrique si $b > 0$, dans le sens horaire si $b < 0$.

L'origine est stable, ni attractif, ni répulsif. On dit que c'est un **centre**.

Dans le cas général

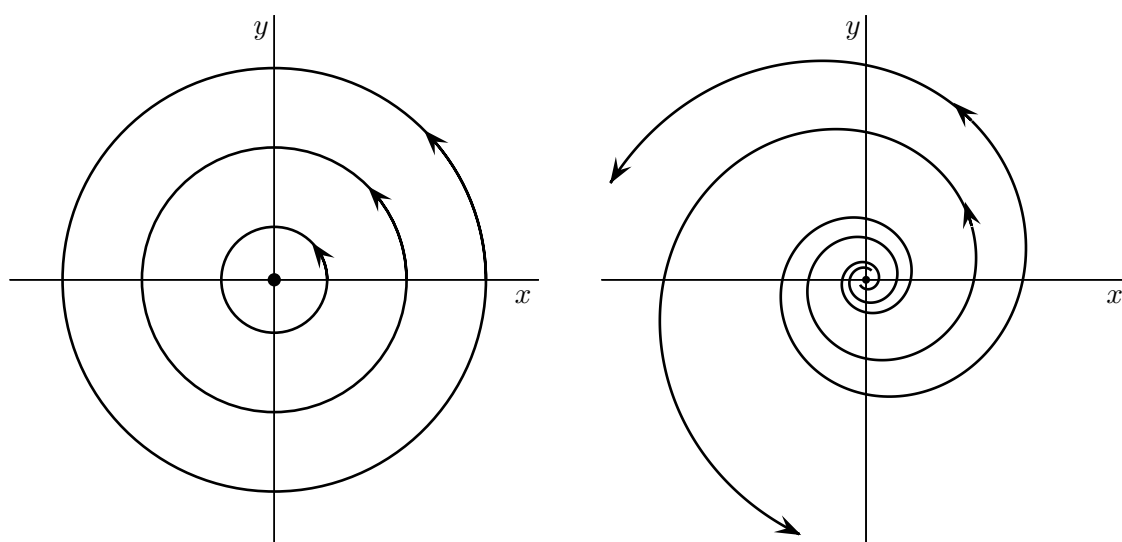
Si $A \in M_2(\mathbb{R})$ admet deux valeurs propres $\pm ib$, avec $b \neq 0$, alors elle est semblable à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

($M = P^{-1}AP$). Dans ce cas :

Les trajectoires du système différentiel de matrice A sont des ellipses centrées en $(0, 0)$ (les images par l'endomorphisme f_P des cercles centrés en $(0, 0)$).

Le sens de rotation est préservé si f_P conserve l'orientation ($\det(P) > 0$). On peut visualiser le champ de vecteurs du système de matrice A pour préciser ce point.



(a) Centre. Matrice $\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$ (ici $b > 0$: sens de rotation direct).

(b) Foyer. Matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Ici $a = 0.2 > 0$ (foyer répulsif) et $b = 1 > 0$ (sens de rotation direct).

FIGURE 7.11 – Centre et Foyer répulsif.

Cas 3.2. $a \neq 0$. FOYER (Figure 7.11 b))

L'origine est le seul point d'équilibre du système.

Toujours dans l'identification de \mathbb{R}^2 et \mathbb{C} , les solutions sont

$$z(t) = Ke^{at}e^{ibt}$$

Alors que $t \rightarrow Ke^{ibt}$ parcourt le cercle centré en $(0, 0)$ de rayon $|K|$:

- Si $a < 0$, $e^{at} \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ et $z(t)$ tend vers l'origine en spiralant.
- Si $a > 0$, $e^{at} \rightarrow +\infty$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ et $z(t)$ s'éloigne de l'origine ($\|z(t)\| \rightarrow +\infty$) en spiralant.

Mis à part le point d'équilibre, toutes les trajectoires sont des spirales.

- Si $a < 0$ l'origine est stable et attractif. En effet, il suffit de remarquer que $|z(t)| = e^{at}|k|$, autrement dit $\|\Phi(t, (x, y))\| = e^{at}\|(x, y)\|$, donc

$$\Phi_t(B_\epsilon((0, 0))) \subset B_{e^{at}\epsilon}((0, 0))$$

On dit que l'origine est un **foyer attractif**.

- Si $a > 0$ l'origine est instable et répulsif, on dit que c'est un **foyer répulsif**.

Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admet deux valeurs propres $a \pm ib$, avec a et b non nuls, alors elle est semblable à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

($M = P^{-1}AP$). Dans ce cas :

Les trajectoires du système différentiel de matrice A sont des spirales orientés vers l'origine si $a < 0$ où vers l'infini si $a > 0$ (il s'agit des images par l'endomorphisme f_P des spirales du système de matrice M !).

Pour déterminer le sens de rotation visualiser le champ de vecteurs du système de matrice A (le signe de b détermine le sens de rotation pour les spirales du système de matrice M , il sera préservé si f_P conserve l'orientation).

7.2.4 Le portrait de phases de $X'(t) = AX(t)$ à partir de $\text{trace}(A)$ et $\det(A)$

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On sait que le polynôme caractéristique de A s'écrit $P_A(x) = x^2 - \text{trace}(A)x + \det(A)$.

Son discriminant est $\Delta = \text{trace}(A)^2 - 4\det(A)$ (dans les applications, on peut calculer directement le polynôme P_A et son discriminant).

Nous allons caractériser à partir des valeurs de Δ , $\text{trace}(A)$ et $\det(A)$ tous les cas étudiés précédemment pour le système différentiel

$$X'(t) = AX(t)$$

D'après la démonstration de la Prop. 2.10.2 on sait que

- i) Si A est diagonalisable sur \mathbb{R} , alors elle est semblable à une matrice diagonale $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- ii) Si A admet une unique valeur propre réelle et A est non diagonalisable, alors elle est semblable à une matrice triangulaire de la forme $M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- iii) Si A admet deux valeurs propres non réelles conjuguées $a - ib$ et $a + ib$ ($b \neq 0$), alors elle est semblable à une matrice de la forme $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Les trois cas précédents sont les seuls possibles pour la matrice A .

Rappelons aussi que deux matrices semblables ont même trace et même déterminant.

La discussion s'articule sur le signe du discriminant :

- a) $\Delta > 0$.

La matrice A possède deux valeurs propres réelles $\lambda \neq \mu$. Elle est diagonalisable et semblable à

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

Par conséquent $\text{trace}(A) = \lambda + \mu$ et $\det(A) = \lambda\mu$.

- a.1) $\det(A) < 0$.

Les valeurs propres sont de signe opposé : l'origine est un **col**. (Cas 1.4).

- a.2) $\det(A) > 0$.

Les valeurs propres sont de même signe

— Positif si $\text{trace}(A) > 0$: l'origine est un **nœud répulsif** (Cas 1.5 a)).

— Négatif si $\text{trace}(A) < 0$: l'origine est un **nœud attractif** (Cas 1.5 b)).

- a.3) $\det(A) = 0$.

Une valeur propre est nulle, l'autre non nulle (Cas 1.2).

- b) $\Delta = 0$.

La matrice A possède une unique valeur propre réelle λ .

- b.1) $A = \lambda I$

— Si $\lambda = 0$ nous sommes dans le Cas 1.1.

— Si $\lambda < 0$, l'origine est un **soleil attractif** (Cas 1.3).

— Si $\lambda > 0$, l'origine est un **soleil répulsif** (Cas 1.3).

- b.2) $A \neq \lambda I$.

La matrice A n'est pas diagonalisable, elle est donc semblable à

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Par conséquent $\text{trace}(A) = 2\lambda$.

— Si $\text{trace}(A) = 0$ nous sommes dans le Cas 2.1.

— Si $\text{trace}(A) < 0$ l'origine est un **nœud impropre attractif** (Cas 2.2 b))

— Si $\text{trace}(A) > 0$ l'origine est un **nœud impropre répulsif** (Cas 2.2 a))

- c) $\Delta < 0$

La matrice A possède deux valeurs propres non réelles $a - ib$, $a + ib$ ($b \neq 0$).

Elle est semblable à

$$M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

Par conséquent $\text{trace}(A) = 2a$.

- c.1) Si $\text{trace}(A) = 0$ l'origine est un **centre** (Cas 3.1).

- c.2) Si $\text{trace}(A) \neq 0$ nous sommes dans le Cas 3.2, l'origine est un

— **Foyer attractif** si $\text{trace}(A) < 0$.

— **Foyer répulsif** si $\text{trace}(A) > 0$.

7.2.5 Portrait de phases de l'oscillateur harmonique

Soit $x(t)$ la position à l'instant t d'un point de masse m ($m > 0$) se déplaçant sur une droite.

On suppose qu'il est soumis à deux forces

- Une force de rappel élastique $-kx(t)$ ($k > 0$).
- Une force de frottement $-cx'(t)$ ($c \geq 0$).

La loi de Newton s'écrit

$$mx''(t) = -kx(t) - cx'(t)$$

ou encore

$$x''(t) = -\frac{k}{m}x(t) - \frac{c}{m}x'(t) \tag{E}$$

Le polynôme caractéristique de l'équation (E) est

$$P(x) = x^2 + \frac{c}{m}x + \frac{k}{m}$$

On sait déterminer les solutions de (E) en fonction des racines de P (voir Sect. 6.5.4).

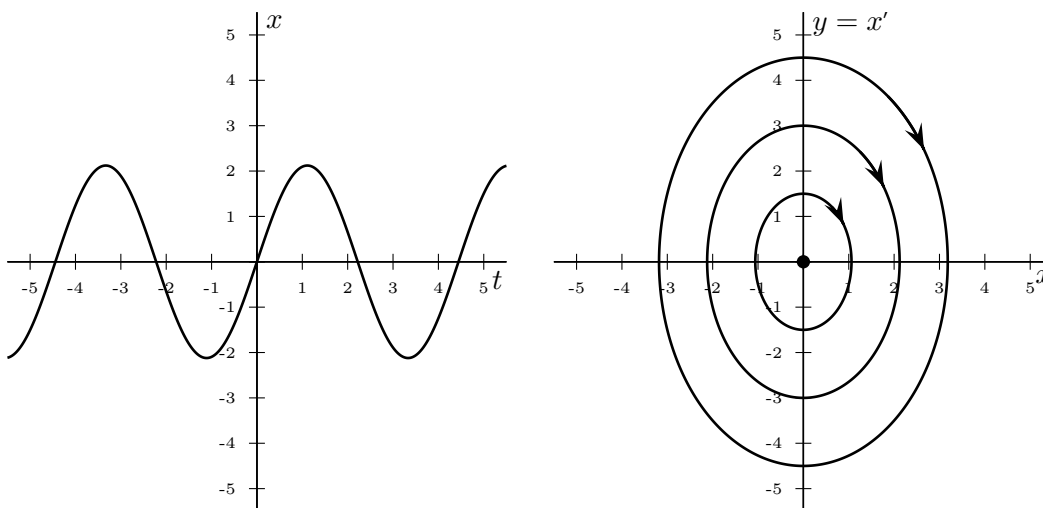
Si $y(t) = x'(t)$ on obtient le système différentiel linéaire

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \tag{S}$$

Nous savons que les solutions maximales de (E) et de (S) sont globales (définies sur \mathbb{R}). Le mot solution désignera par la suite une solution globale.

A partir du lien entre (E) et (S), on sait que $t \rightarrow x(t)$ est solution de (E) si et seulement si $t \rightarrow (x(t), x'(t))$ est solution de (S).

Remarquons enfin que l'origine est le seul point d'équilibre du système et que le polynôme caractéristique de la matrice A n'est autre que P .



(a) La solution de l'équation (E) pour les conditions initiales $x(0) = 0, x'(0) = 3$. (b) Portrait de phases du système (S) (centre), avec la trajectoire associée à la solution de (a).

FIGURE 7.12 – L'oscillateur non amorti : $c = 0$ (on a pris ici $m = 1$ et $k = 2$).

L'oscillateur non amorti : $c = 0$.

La matrice du système (S) est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est $P_A(x) = x^2 + k/m$ et A possède deux valeurs propres imaginaires.

L'origine est donc un **centre** (voir Fig. 7.12). Il est **stable, non asymptotiquement stable**.

Les trajectoires du système sont des ellipses.

Toute solution non nulle de (E) oscille indéfiniment sans tendre vers 0.

Remarque : Conservation de l'énergie

L'énergie mécanique du système (somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle) est

$$E(x(t), y(t)) = \frac{1}{2}my^2(t) + \frac{1}{2}kx^2(t)$$

(ne pas oublier que $y(t) = x'(t)$).

Remarquons que si $t \rightarrow (x(t), y(t))$ est solution de (S), on a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dt}E(x(t), y(t)) = my(t)y'(t) + kx(t)x'(t) = mx'(t) \left(-\frac{k}{m}x(t) \right) + kx(t)x'(t) = 0$$

c'est-à-dire que l'énergie est constante le long des trajectoires de (S).

On dit alors que (S) est un système **conservatif**.

En particulier, les trajectoires du système sont contenues dans les courbes de niveau de la fonction $E : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $E(x, y) = \frac{1}{2}my^2 + \frac{1}{2}kx^2$: il s'agit d'ellipses centrées en $(0, 0)$ d'axes Ox et Oy , l'origine étant un minimum local (et global) strict de E (voir Fig 7.12 b).

Nous retrouvons à partir de la conservation de l'énergie le fait qu'une trajectoire passant par un point proche de l'origine reste toujours proche de lui (stabilité) mais ne peut pas tendre vers l'origine (qui n'est donc pas attractif).

Nous mettrons en évidence dans la Section 7.6 le caractère stable, non asymptotiquement stable, des minimums locaux stricts de l'énergie pour un système conservatif (Th. de Lejeune-Dirichlet).

Ce phénomène est aussi illustré par le cas du pendule non amorti (Sect. 7.7.1).

L'oscillateur amorti : $c > 0$.

On a maintenant $\text{trace}(A) = -\frac{c}{m}$, $\det(A) = \frac{k}{m}$ et le discriminant du polynôme caractéristique est

$$\Delta = \left(\frac{c}{m} \right)^2 - 4\frac{k}{m}$$

Utilisons la discussion de la section précédente pour identifier rapidement le portrait de phases du système (S) :

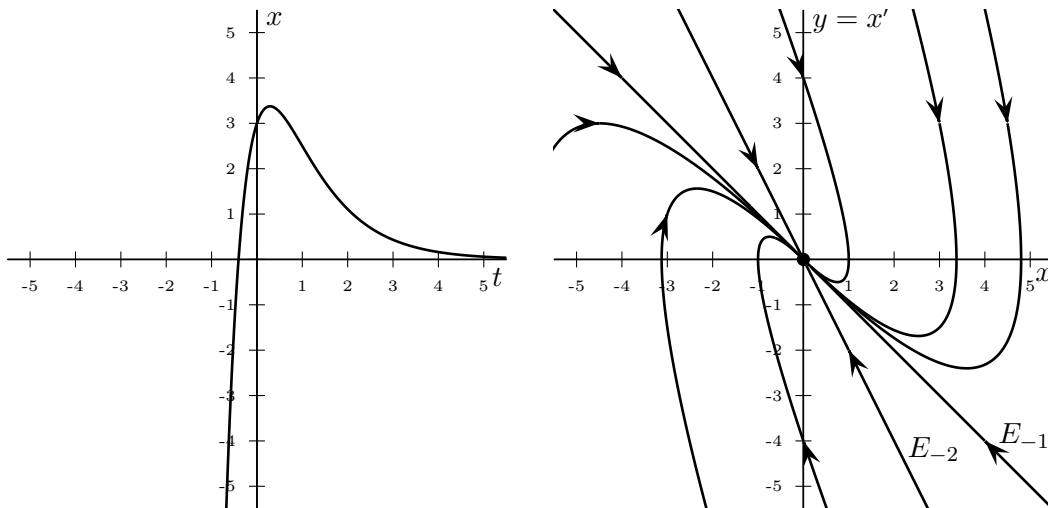
CAS a) $\Delta > 0 \Leftrightarrow c^2 > 4km$.

Le coefficient de frottement est grand, on parle d'**amortissement fort**.

Puisque $\det(A) > 0$ et $\text{trace}(A) < 0$, l'origine est un **nœud attractif** (voir Fig. 7.13).

Il est un point d'équilibre asymptotiquement stable de (S) .

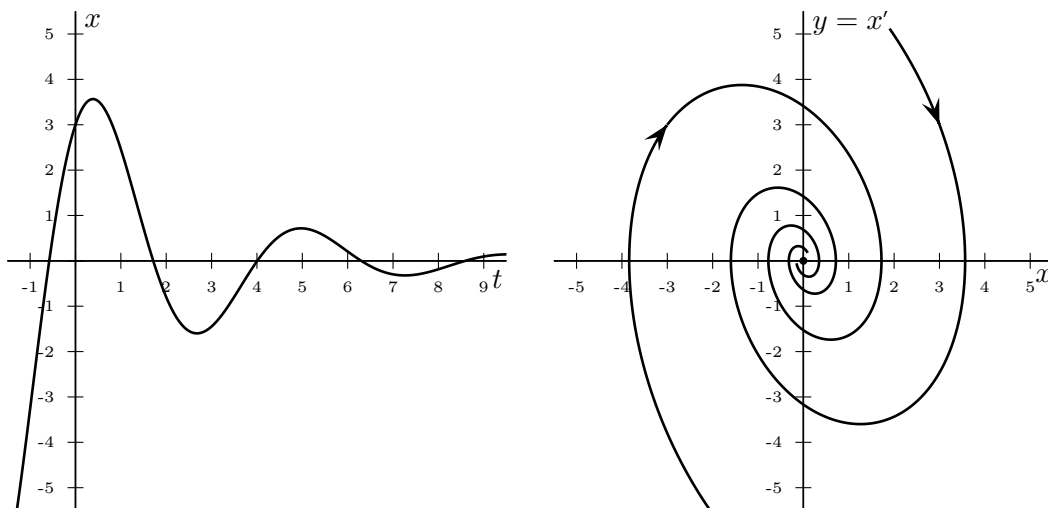
Les solutions $t \rightarrow x(t)$ de (E) tendent vers 0 sans osciller lorsque $t \rightarrow +\infty$.



(a) La solution de l'équation (E) pour les conditions initiales $x(0) = 3, x'(0) = 3$.

(b) Portrait de phases de (S) (nœud attractif), avec la trajectoire associée à la solution de (a).

FIGURE 7.13 – L'oscillateur amorti : amortissement fort (on a pris ici $m = 1, k = 2$ et $c = 3$).



(a) La solution de l'équation (E) pour les conditions initiales $x(0) = 3, x'(0) = 3$.

(b) Portrait de phases de (S) (foyer attractif), avec la trajectoire associée à la solution de (a).

FIGURE 7.14 – L'oscillateur amorti : amortissement faible (ici $m = 1, k = 2$ et $c = 0.7$).

CAS b) $\Delta = 0 \Leftrightarrow c^2 = 4km$.

On parle ici **d'amortissement critique**.

Comme $A \neq \lambda I$ et $\text{trace}(A) < 0$, l'origine est un **nœud impropre attractif** de (S) .

Il est asymptotiquement stable.

Les solutions de (E) tendent vers 0 sans osciller lorsque $t \rightarrow +\infty$.

CAS c) $\Delta < 0 \Leftrightarrow c^2 < 4km$.

On parle alors **d'amortissement faible**.

Puisque $\text{trace}(A) < 0$, l'origine est un **foyer attractif** de (S) (voir Fig. 7.14).

Il est asymptotiquement stable.

Lorsque $t \rightarrow +\infty$, les solutions de (E) tendent vers 0 en oscillant indéfiniment (oscillations amorties).

Remarque : Dissipation de l'énergie

En conclusion, l'origine est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour l'oscillateur amorti.

L'énergie du système est toujours donnée par l'expression

$$E(x(t), y(t)) = \frac{1}{2}my^2(t) + \frac{1}{2}kx^2(t)$$

mais le système est maintenant **dissipatif** :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(x(t), y(t)) &= my(t)y'(t) + kx(t)x'(t) \\ &= mx'(t) \left(-\frac{k}{m}x(t) - \frac{c}{m}x'(t) \right) + kx(t)x'(t) \\ &= -c(x'(t))^2 = -c(y(t))^2 \leq 0 \end{aligned}$$

L'énergie mécanique diminue le long des trajectoires : elles traversent les courbes de niveau de la fonction E et tendent vers son minimum. Ceci rend intuitif (du point de vue physique et mathématique) ce changement de comportement par rapport au cas conservatif, changement que nous trouverons aussi dans le cas du pendule amorti (Sect. 7.7.2).

7.2.6 Familles à un paramètre de systèmes différentiels linéaires

Soit J un intervalle ouvert et

$$\alpha \longrightarrow A(\alpha) = \begin{pmatrix} a_{11}(\alpha) & a_{12}(\alpha) \\ a_{21}(\alpha) & a_{22}(\alpha) \end{pmatrix}$$

une application définie sur J à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, où les fonctions $a_{ij} : J \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues.

Considérons la famille à un paramètre de systèmes différentiels linéaires

$$X'(t) = A(\alpha)X(t) \tag{S_\alpha}$$

Les fonctions à valeurs réelles définies sur l'intervalle J par

$$\alpha \rightarrow \text{trace}(A(\alpha)) \quad \text{et} \quad \alpha \rightarrow \det(A(\alpha))$$

sont polynomiales en $a_{ij}(\alpha)$, donc continues sur J . Il en est de même pour la fonction définie sur J à partir du discriminant du polynôme caractéristique de $A(\alpha)$

$$\alpha \rightarrow \Delta(\alpha) = \text{trace}(A(\alpha))^2 - 4 \det(A(\alpha))$$

Fixons maintenant $\alpha_0 \in J$.

• Supposons par exemple que l'origine est un col pour le système (S_{α_0}) .

Ceci est caractérisé par

$$\Delta(\alpha_0) > 0 \quad \text{et} \quad \det(A(\alpha_0)) < 0$$

Grâce à la continuité des fonctions $\alpha \rightarrow \Delta(\alpha)$ et $\alpha \rightarrow \det(A(\alpha))$, nous pouvons affirmer qu'il existe un intervalle $]\alpha_0 - \epsilon, \alpha_0 + \epsilon[\subset J$ tel que

$$\Delta(\alpha) > 0 \quad \text{et} \quad \det(A(\alpha)) < 0 \quad \text{pour tout } \alpha \in]\alpha_0 - \epsilon, \alpha_0 + \epsilon[$$

Par conséquent, l'origine est toujours un col pour le système (S_α) si α est proche de α_0 .

Le résultat est le même pour tout portrait de phases caractérisé à partir **d'inégalités** (« ... > 0 », « ... < 0 ») portant sur $\text{trace}(A(\alpha_0))$, $\det(A(\alpha_0))$ et $\Delta(\alpha_0)$, puisqu'elles seront conservées sur un voisinage de α_0 grâce à la continuité.

• Supposons maintenant que l'origine est un centre pour le système (S_{α_0}) .

Autrement dit

$$\Delta(\alpha_0) < 0 \quad \text{et} \quad \text{trace}(A(\alpha_0)) = 0$$

on ne peut pas garantir que l'origine sera un centre pour (S_α) , même si α est arbitrairement proche de α_0 , car **l'égalité** $\text{trace}(A(\alpha_0)) = 0$ peut ne pas être conservée pour $\text{trace}(A(\alpha))$.

La conséquence est la même pour tout portrait de phases caractérisé par au moins une **égalité** (« ... = 0 ») sur $\text{trace}(A(\alpha_0))$, $\det(A(\alpha_0))$ ou $\Delta(\alpha_0)$.

Remarque

La section précédente donne un exemple de famille à un paramètre de systèmes linéaires, puisque nous avons étudié l'oscillateur harmonique

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{pmatrix}}_{A(c)} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (S_c)$$

en fonction du coefficient de frottement $c \in [0, +\infty[$.

On notera que les portraits de phases « foyer attractif » et « nœud attractif » persistent sur des intervalles ouverts du paramètre c comme prévu par la théorie que nous venons de développer (ils sont caractérisés à partir d'inégalités sur le discriminant, trace ou déterminant).

On ne s'étonnera pas du fait que le centre et le nœud impropre attractif n'apparaissent que pour des valeurs isolés du paramètre ($c = 0$ et $c^2 = 4km$ respectivement).

7.3 Portraits de phase en dimension 1

Si $n = 1$, le système (S) est tout simplement une équation autonome $(E) : x'(t) = f(x(t))$.

Nous avons étudié dans l'Exemple 1 de la Sect 7.1.2 un portrait de phases en dimension 1 à partir des solutions de l'équation différentielle (voir Fig. 7.1).

La connaissance explicite des solutions de (E) n'est cependant pas nécessaire pour tracer son portrait de phases comme le montre la Prop. 7.3.1.

Soit par exemple $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (x - 1) \arctan(x)$. Considérons l'équation différentielle

$$x'(t) = f(x(t)) = (x(t) - 1) \arctan(x(t)) \quad (E')$$

La fonction f s'annule en $x = 0$ et $x = 1$: les solutions maximales constantes de (E') sont les fonctions définies sur \mathbb{R} par $t \rightarrow 0$ et $t \rightarrow 1$. Les trajectoires correspondantes ($\{0\}$ et $\{1\}$) sont les seuls points d'équilibre du système.

Le Th. de Cauchy-Lipschitz (Th. 5.4.1) et le Th des bouts (voir Sect. 5.5) s'appliquent sur le plan tout entier. Le premier implique que les graphes de deux solutions maximales distinctes de (E') sont disjoints. Par conséquent, si $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une solution maximale non constante de (E') alors, à partir de sa continuité sur l'intervalle I , on a (voir Fig. 7.15) :

1. Ou bien $x(I) \subset]-\infty, 0[$: elle est alors strictement croissante sur I car la fonction f est strictement positive sur $]-\infty, 0[$.
2. Ou bien $x(I) \subset]0, 1[$: elle est alors strictement décroissante sur I puisque $f < 0$ sur $]0, 1[$. Par ailleurs, le Th. des bouts implique qu'elle est globale ($I = \mathbb{R}$).
3. Ou bien $x(I) \subset]1, +\infty[$. Comme $f > 0$ sur cet intervalle, la fonction x est strictement croissante sur I .

La proposition suivante montre que les inclusions des trois cas précédents sont des égalités. Par conséquent, les intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$ sont les autres trajectoires du système : le portrait de phases de (E') est tracé sur l'axe Ox dans la Figure 7.15.

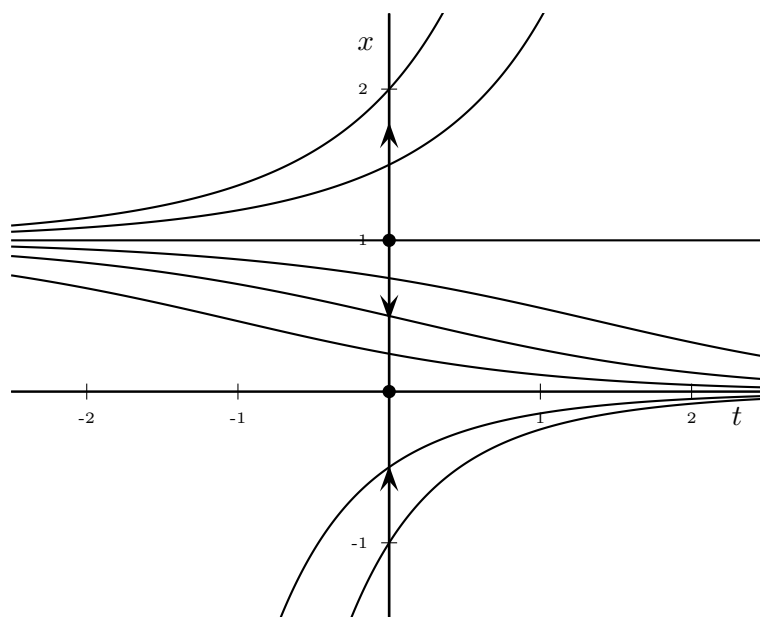


FIGURE 7.15 – Graphes des solutions et portrait de phases de $x'(t) = (x(t) - 1) \arctan(x(t))$.

Proposition 7.3.1 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 .
Considérons l'équation différentielle

$$x'(t) = f(x(t)) \tag{E}$$

1. Soit $x :]t_1, t_2[\rightarrow \mathbb{R}$ une solution maximale de (E). Si

$$\lim_{t \rightarrow t_2^-} x(t) = \ell \in \mathbb{R}$$

alors $t_2 = +\infty$ et $f(\ell) = 0$ (ℓ est donc un point d'équilibre de (E)).

De même, si $\lim_{t \rightarrow t_1^+} x(t) = \ell' \in \mathbb{R}$, alors $t_1 = -\infty$ et $f(\ell') = 0$

2. Soient $a < b$ deux points d'équilibre de (E) ($f(a) = f(b) = 0$).

Supposons que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$ (f garde alors un signe constant sur cet intervalle, d'après le Th. des valeurs intermédiaires).

Alors $]a, b[$ est une trajectoire de (E). Si $f > 0$ sur $]a, b[$, elle est orientée dans le sens croissant. Si $f < 0$ sur $]a, b[$, elle est orientée dans le sens décroissant.

3. Soit c un point d'équilibre de (E). Supposons que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in]-\infty, c[$. Alors $]-\infty, c[$ est une trajectoire de (E). Son orientation dépend du signe de f sur cet intervalle (voir 2.). On dispose de l'énoncé analogue sur $]c, +\infty[$.

4. Enfin, si (E) n'a pas de points d'équilibre, la seule trajectoire est \mathbb{R} (orienté selon le signe de f).

Démonstration :

• Montrons 1. A partir de l'hypothèse, il existe $T \in]t_1, t_2[$ tel que

$$x(t) \in [\ell - 1, \ell + 1] \text{ pour tout } t \in]T, t_2[$$

Comme la solution ne peut pas exploser si $t \rightarrow t_2^-$, alors $t_2 = +\infty$ d'après le Th. des bouts (voir Sect. 5.5, ici $\Omega = \mathbb{R}$). Nous avons donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \ell \in \mathbb{R} \tag{*}$$

Montrons que $f(\ell) = 0$. Par l'absurde : supposons donc que $f(\ell) \neq 0$.

A partir de la continuité de f on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(x(t)) = f(\ell)$$

et $|x'(t)| \rightarrow |f(\ell)|$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. En particulier, il existe $\tau > t_1$ tel que

$$|x'(t)| \geq \frac{|f(\ell)|}{2} > 0$$

pour tout $t \geq \tau$. Le Th. des accroissements finis implique alors que

$$|x(t) - x(\tau)| \geq \frac{|f(\ell)|}{2} |t - \tau|$$

pour tout $t \geq \tau$. Ainsi

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t) - x(\tau)| = +\infty$$

Or, d'après (*), on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t) - x(\tau)| = |\ell - x(\tau)|$. *Contradiction!*

• *Montrons par exemple 3. Les arguments pour 2. et 4. sont analogues.*

Supposons que $f(c) = 0$ et (par exemple) que $f(x) > 0$ pour tout $x \in]-\infty, c[$.

Soit $x_0 \in]-\infty, c[$ et $x :]t_1, t_2[\rightarrow \mathbb{R}$ la solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(t_1) = x_0 \end{cases}$$

On sait alors que $x(t) < c$ pour tout $t \in]t_1, t_2[$ puisque $x(t_1) < c$ et que les graphes des solutions maximales $t \rightarrow x(t)$ et $t \rightarrow c$ sont disjoints (voir Sect 5.4).

Par conséquent

$$x'(t) = f(x(t)) > 0$$

pour tout $t \in]t_1, t_2[$ et notre solution est strictement croissante. Comme elle est majorée par c on a

$$\lim_{t \rightarrow t_2^-} x(t) = \ell \in \mathbb{R} \text{ avec } \ell \leq c$$

et d'après 1. on a ($t_2 = +\infty$) et $f(\ell) = 0$ ce qui implique que $\ell = c$ car c est le seul zéro de f sur $]-\infty, c[$.

La monotonie de x sur $]t_1, t_2[$ implique que sa limite en t_1^+ existe (finie ou infinie).

La limite ne peut pas être finie : 1. et l'argument précédent impliqueraient alors que

$$\lim_{t \rightarrow t_1^+} x(t) = c \left(= \lim_{t \rightarrow t_2^-} x(t) \right)$$

absurde puisque x est strictement croissante. On a donc $\lim_{t \rightarrow t_1^+} x(t) = -\infty$.

En résumé, $x(]t_1, t_2[) =]-\infty, c[$. Nous avons prouvé que $]-\infty, c[$ est une trajectoire de (E) , orientée dans le sens croissant (monotonie de la solution) \square

Le portrait de phases à partir du signe de f

Le tableau suivant illustre un exemple d'application de la proposition pour tracer le portrait de phases de l'équation

$$x'(t) = f(x(t)) \tag{E}$$

à partir du signe de f :

x	$-\infty$	α	β	γ	δ	$+\infty$				
Signe $f(x)$		-	0	-	0	+	0	+	0	-
Trajectoires	$] - \infty, \alpha[$	$\{\alpha\}$	$] \alpha, \beta[$	$\{\beta\}$	$] \beta, \gamma[$	$\{\gamma\}$	$] \gamma, \delta[$	$\{\delta\}$	$] \delta, +\infty[$	
Orientation	\leftarrow	\bullet	\leftarrow	\bullet	\rightarrow	\bullet	\rightarrow	\bullet	\leftarrow	

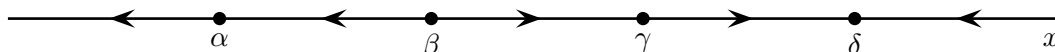


FIGURE 7.16 – Portrait de phases.

On notera qu'il y a seulement trois types possibles de points d'équilibre isolés. Ils sont déterminés par le signe de f au voisinage de chaque zéro :

1. Signe « + 0 - » (point δ de l'exemple) : point d'équilibre asymptotiquement stable (c'est-à-dire stable et attractif).
2. Signe « - 0 + » (point β) : point d'équilibre instable et répulsif.
3. Signe « + 0 + » ou « - 0 - » (points γ ou α) : point d'équilibre instable, non répulsif.

Voici des conditions **suffisantes** pour avoir des points d'équilibre des deux premiers types

1. Si $f(x_0) = 0$ et $f'(x_0) < 0$, alors x_0 est asymptotiquement stable.
2. Si $f(x_0) = 0$ et $f'(x_0) > 0$, alors x_0 est instable et répulsif.

7.3.1 Familles à un paramètre d'équations autonomes. Bifurcation

Étudions un exemple pour fixer les idées. Soit $\mu \in \mathbb{R}$ et considérons la famille à un paramètre d'équations autonomes

$$x'(t) = x^2(t) - \mu \tag{E_\mu}$$

qu'on peut écrire

$$x'(t) = f(x(t), \mu)$$

où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction de classe \mathcal{C}^1 définie par $f(x, \mu) = x^2 - \mu$.

Les points d'équilibre de (E_μ) sont les solutions de $f(x, \mu) = 0$:

1. Si $\mu < 0$ il n'y a pas de point d'équilibre et $f(x, \mu) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Si $\mu = 0$ il y a un point d'équilibre unique $x = 0$ et $f(x, \mu) > 0$ pour tout $x \neq 0$.
3. Si $\mu > 0$ il y a deux points d'équilibre $-\sqrt{\mu}$ et $\sqrt{\mu}$.
On a $f(x, \mu) < 0$ pour tout $x \in]-\sqrt{\mu}, \sqrt{\mu}[$ et $f(x, \mu) > 0$ si $x < -\sqrt{\mu}$ ou $\sqrt{\mu} < x$.

Ces informations nous permettent de tracer les portraits de phases de l'équation (E_μ) pour tous les valeurs de μ (voir Fig; 7.17).

On peut les visualiser ensemble sur le plan $Ox\mu$: le portrait de phases de (E_{μ_0}) est tracé sur la droite $\mu = \mu_0$. La parabole $\mu = x^2$ du plan $Ox\mu$ donne les points d'équilibre.

Cette représentation graphique s'appelle **diagramme de bifurcation**

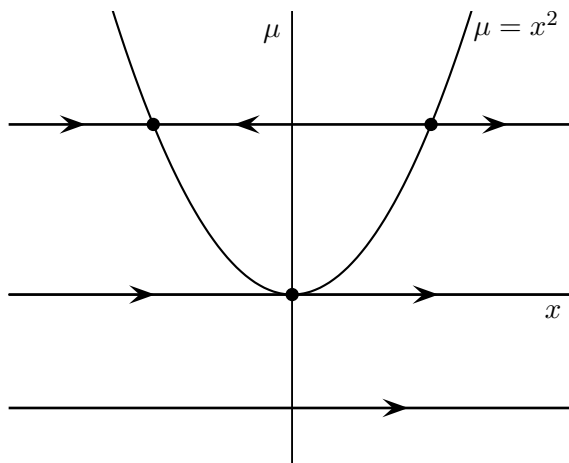


FIGURE 7.17 – Diagramme de bifurcation de la famille $x'(t) = x^2(t) - \mu$.

On remarque que lorsque le paramètre μ traverse la valeur $\mu = 0$ il y a un **changement qualitatif** du portrait de phases de (E_μ) au voisinage de l'origine $x = 0$ (le point d'équilibre de (E_0)).

On dira que $\mu = 0$ est une **valeur de bifurcation locale** du point d'équilibre $x = 0$.

7.4 Stabilité asymptotique des points d'équilibre d'un système linéaire dans \mathbb{R}^n

On dispose du résultat général suivant

Théorème 7.4.1 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et considérons le système différentiel linéaire*

$$X'(t) = AX(t) \tag{SL}$$

*L'origine est un point d'équilibre **asymptotiquement stable** de (SL) si et seulement si les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative.*

Remarques

1. Si $n = 1$, (SL) est l'équation linéaire homogène

$$x'(t) = ax(t) \tag{E}$$

qu'on peut écrire $x'(t) = f(x(t))$, où f est l'application linéaire $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = ax$. Ainsi $f = aId$ et a est valeur propre de f . Sa matrice dans la base canonique est $A = (a)$.

L'étude des portraits de phase de (E) si $a < 0$, $a = 0$ et $a > 0$ est élémentaire (voir la section précédente) et montre que 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable de (E) si et seulement si $a < 0$: nous avons prouvé le Th. en dimension 1.

2. Nous avons aussi établi le Théorème si $n = 2$:

En effet, les Sections 7.1.5 et 7.2 montrent que l'origine est un point d'équilibre asymptotiquement stable si et seulement si il est

- un soleil attractif,
- un nœud attractif,
- un nœud impropre attractif ou
- un foyer attractif.

C'est-à-dire si et seulement si les valeurs propres de la matrice du système sont toutes de partie réelle strictement négative.

Voici un résultat en dimension n qu'on peut montrer facilement

Proposition 7.4.2 *Si la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possède une valeur propre de partie réelle strictement positive, alors*

1. *Il existe une solution $X_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ du système*

$$X'(t) = AX(t) \tag{SL}$$

telle que $\lim_{t \rightarrow -\infty} X_1(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X_1(t)\| = +\infty$.

2. *L'origine est un point d'équilibre **instable** du système (SL).*

Démonstration :

La partie 2. est conséquence de 1 :

Pour montrer que l'origine 0 est instable (voir Sect 7.1.4) considérons par exemple la boule ouverte $B_1(0)$ et montrons que pour toute autre boule ouverte $B_\delta(0) \subset B_1(0)$ on peut trouver $X_0 \in B_\delta(0)$ et $t > 0$ tels que $\Phi(t, X) \notin B_1(0)$.

Fixons alors δ .

Comme $\lim_{t \rightarrow -\infty} X_1(t) = 0$, il existe $X_0 = X_1(t_0) \in B_\delta(0)$.

Puisque $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X_1(t)\| = +\infty$, il existe bien un $t > 0$ tel que $\Phi(t, X_0) \notin B_1(0)$.

Montrons 1 :

Si le réel λ est valeur propre de A , soit V un vecteur propre associé. Il suffit alors de considérer la solution de (SL)

$$X_1(t) = e^{\lambda t} V$$

Si $a - ib$ est valeur propre de A avec $a > 0$ et $b \neq 0$, soit $U \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé.

Écrivons $U = V_1 + iV_2$ avec $V_1, V_2 \in \mathbb{R}^n$, on montre alors comme dans la Prop. 2.10.2 que (V_1, V_2) est une suite libre et

$$AV_1 = aV_1 + bV_2$$

$$AV_2 = -bV_1 + aV_2$$

En particulier, si f est l'endomorphisme de \mathbb{R}^n associé à la matrice A ($f : X \rightarrow AX$), le plan $\Pi = \text{Vect}(V_1, V_2)$ vérifie $f(\Pi) = \Pi$.

Formulé géométriquement, ceci signifie que le champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n : X \rightarrow AX$ restreint au plan Π est en fait un champ de vecteurs sur Π :

$$X \in \Pi \Rightarrow AX \in \Pi$$

Ainsi, une solution qui passe par un point de Π reste toujours dans ce plan, donc Π est invariant par le flot du système

$$X \in \Pi \Rightarrow \Phi(t, X) \in \Pi$$

pour tout $t \geq 0$.

Comme $f(\Pi) = \Pi$, on peut considérer f_Π , l'endomorphisme de Π défini par la restriction de f à ce plan, puisque

$$\text{Mat}(f_\Pi, (V_1, V_2)) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

il vient que le portrait de phases du système (SL) sur le plan Π est celui d'un foyer répulsif : toute solution de (SL) sur Π (autre que la solution nulle) vérifie 1 □

7.5 Linéarisation autour d'un point d'équilibre

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 .

Considérons le système différentiel

$$X'(t) = f(X(t)) \tag{S}$$

Soit $X_0 \in \Omega$ un point d'équilibre de (S) : $f(X_0) = 0$.

On sait (Prop. 4.6.2) que pour tout U dans un voisinage de 0 (c'est-à-dire, pour tout $X_0 + U$ dans un voisinage de X_0) on a

$$f(X_0 + U) = f(X_0) + df(X_0)(U) + \|U\|\varepsilon(U) = df(X_0)(U) + \|U\|\varepsilon(U)$$

avec $\varepsilon(U) \rightarrow 0$ lorsque $U \rightarrow 0$.

Rappelons que $df(X_0)$ (la différentielle de f au point X_0) est l'endomorphisme de \mathbb{R}^n de matrice

$$J_f(X_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(X_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(X_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(X_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(X_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(X_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(X_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(X_0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(X_0) \end{pmatrix}$$

dite matrice jacobienne de f au point X_0 . L'endomorphisme $U \rightarrow df(X_0)(U)$ donne la meilleure approximation linéaire de la fonction $U \rightarrow f(X_0 + U)$ au voisinage de $U = 0$.

Considérons le changement de coordonnées affine

$$X = X_0 + U$$

($X = X_0 \Leftrightarrow U = 0$) qui induit le changement de fonction inconnue $X(t) = X_0 + U(t)$. Alors $X'(t) = U'(t)$ et le système différentiel (S) s'écrit

$$\begin{aligned} U'(t) &= f(X_0 + U(t)) = df(X_0)(U(t)) + \|U(t)\|\varepsilon(U(t)) \\ &= J_f(X_0) \cdot U(t) + \|U(t)\|\varepsilon(U(t)) \end{aligned}$$

Il est donc naturel d'étudier le lien entre les propriétés de stabilité de X_0 , point d'équilibre du système différentiel (S), et celles de 0 comme point d'équilibre du système différentiel linéaire

$$\tilde{U}'(t) = df(X_0)(\tilde{U}(t)) = J_f(X_0) \cdot \tilde{U}(t) \tag{LinS}$$

Le Th. de Liapounov donnera une réponse à ce problème.

Le système linéaire (LinS) s'appelle le linéarisé du système (S) au point X_0 .

Il n'est pas nécessaire d'utiliser la notation \tilde{U} pour désigner l'inconnue de (LinS), qu'on pourra noter X à condition de garder à l'esprit que

L'étude de l'origine comme point d'équilibre de (LinS) peut nous renseigner sur les propriétés de X_0 , point d'équilibre de (S).

Définition 7.5.1 Le système linéarisé de (S) au point d'équilibre X_0 est le système différentiel linéaire de matrice

$$J_f(X_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X_0) \right)$$

7.5.1 Le Théorème de Liapounov

Théorème 7.5.2 (Liapounov)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 et $X_0 \in \Omega$ un point d'équilibre du système différentiel

$$X'(t) = f(X(t)) \tag{S}$$

1. Si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne

$$J_f(X_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X_0) \right)$$

ont une partie réelle strictement négative, alors X_0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable de (S).

2. S'il existe au moins une valeur propre de $J_f(X_0)$ dont la partie réelle est strictement positive, alors X_0 est un point d'équilibre instable de (S).

Remarquons que

L'hypothèse de la partie 1. caractérise la stabilité asymptotique de l'origine comme point d'équilibre du système différentiel linéaire de matrice

$$J_f(X_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X_0) \right)$$

c'est-à-dire le système linéarisé de (S) au point X_0 (voir Th. 7.4.1).

L'hypothèse de la partie 2. implique que l'origine est un point d'équilibre instable du système linéarisé de (S) au point X_0 (voir Prop. 7.4.2).

On retiendra que, dans les hypothèses du Th de Liapounov, la linéarisation conserve la nature du point d'équilibre.

Remarques

1. En dimension 1, la linéarisation de l'équation (E) : $x'(t) = f(x(t))$ au point d'équilibre x_0 ($f(x_0) = 0$) est $x'(t) = f'(x_0) \cdot x(t)$.

Le Th. nous dit que

1. Si $f'(x_0) < 0$, alors x_0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable de (E)
2. Si $f'(x_0) > 0$, alors x_0 est un point d'équilibre instable de (E)

résultats que nous avons montré directement dans la Section 7.3. (dans le deuxième cas, x_0 est aussi répulsif).

2. En général, s'il existe une valeur propre de partie réelle nulle, la linéarisation ne conserve pas toujours la nature des points d'équilibre comme le montrent les exemples suivantes, toujours en dimension 1 :

1. L'origine est un point d'équilibre asymptotiquement stable de l'équation $x'(t) = -x^3(t)$
2. L'origine est un point d'équilibre instable et répulsif de $x'(t) = x^3(t)$
3. L'origine est un point d'équilibre instable et non répulsif de $x'(t) = x^2(t)$

La linéarisation des trois équations précédentes est l'équation

$$x'(t) = 0$$

pour laquelle l'origine est un point d'équilibre stable, non asymptotiquement stable (comme le reste des points de la droite).

3. Complétons enfin l'étude des liens entre un système et son linéarisé par ce résultat :

Le Th. de Hartman-Grobman (qu'on n'énoncera pas avec précision ici) nous garantit que si toutes les valeurs propres de la matrice $J_f(X_0)$ ont une partie réelle non nulle, alors le portrait de phases du système $(S) : X'(t) = f(X(t))$ sur un voisinage V du point d'équilibre X_0 « ressemble » au portrait de phases sur un voisinage V' de l'origine de son système linéarisé $(LinS)$.

On peut montrer en effet qu'il existe une bijection continue h de V' sur V , avec h^{-1} continue aussi, telle que les trajectoires de (S) sur V sont les images par h des trajectoires de $(LinS)$ sur V' . De plus h conserve le temps.

7.6 Systèmes conservatifs

Soit $n = 1, 2, 3$.

Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $X(t)$ la position d'un point matériel de masse m évoluant dans un champ de forces $F : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

D'après la loi de Newton on obtient un système différentiel d'ordre 2 dans \mathbb{R}^n

$$mX''(t) = F(X(t)) \tag{1}$$

Si le champ F est le gradient d'une fonction $-\psi : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ on dit que F dérive d'un potentiel (ψ est le potentiel de F). On a donc

$$F(X) = \text{grad}(-\psi)(X) = -\text{grad} \psi (X) = - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(X), \dots, \frac{\partial \psi}{\partial x_n}(X) \right)$$

et le système (1) s'écrit

$$mX''(t) = -\text{grad} \psi (X(t))$$

Si $V(t) = X'(t)$ on obtient le système différentiel du premier ordre dans \mathbb{R}^{2n}

$$\begin{cases} X'(t) = V(t) \\ V'(t) = -\frac{1}{m} \text{grad} \psi (X(t)) \end{cases}$$

Le cadre mathématique

Ces considérations motivent l'étude du système différentiel qui suit

Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert.

Soit $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 .

Désignons par (X, V) les éléments de $\mathcal{O} \times \mathbb{R}^n$. Soit alors $f : \mathcal{O} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ la fonction définie par

$$f(X, V) = (V, -\text{grad } \varphi(X))$$

Il s'agit d'une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert $\mathcal{O} \times \mathbb{R}^n$ de \mathbb{R}^{2n} .

Considérons enfin le système différentiel sur $\mathcal{O} \times \mathbb{R}^n$

$$(X'(t), V'(t)) = f(X(t), V(t)) = (V(t), -\text{grad } \varphi(X(t))) \quad (SC)$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} X'(t) = V(t) \\ V'(t) = -\text{grad } \varphi(X(t)) \end{cases} \quad (SC)$$

Remarques

1. Si $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ et $V(t) = (v_1(t), \dots, v_n(t))$ le système (SC) s'écrit

$$\begin{cases} x_1'(t) = v_1(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = v_n(t) \\ v_1'(t) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(X(t)) \\ \vdots \\ v_n'(t) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(X(t)) \end{cases} \quad (SC)$$

2. Soit \mathcal{O} un intervalle ouvert et $h : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction \mathcal{C}^1 . Considérons l'équation différentielle

$$x''(t) = -h(x(t)) \quad (E)$$

Si $v(t) = x'(t)$, l'équation s'écrit

$$\begin{cases} x'(t) = v(t) \\ v'(t) = -h(x(t)) \end{cases}$$

Soit φ une primitive de h sur \mathcal{O} (par exemple $\varphi(x) = \int_{x_0}^x h(s) ds$ pour tout $x \in \mathcal{O}$, avec $x_0 \in \mathcal{O}$ fixé). Comme h est \mathcal{C}^1 , φ est \mathcal{C}^2 sur \mathcal{O} . Alors $h = \varphi' = \text{grad } \varphi$ et on a

$$\begin{cases} x'(t) = v(t) \\ v'(t) = -\text{grad } \varphi(x(t)) \end{cases}$$

Ainsi toute équation de la forme (E) origine un système du type (SC) avec $n = 1$.

3. Les équations de l'oscillateur harmonique non amorti et du pendule simple non amorti sont deux cas particuliers d'équations de la forme (E).

Pour l'oscillateur on a $x''(t) = -\frac{k}{m}x(t)$. Ici $\mathcal{O} = \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{k}{m}x$, et une primitive de h sur \mathbb{R} est $\varphi(x) = \frac{k}{m} \frac{x^2}{2}$.

Pour le pendule, l'équation est $x''(t) = -\frac{g}{l} \sin(x(t))$. Ici $\mathcal{O} = \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{g}{l} \sin x$ et l'on prend comme primitive de h sur \mathbb{R} la fonction $\varphi(x) = \frac{g}{l}(1 - \cos x)$ (pour avoir : $\varphi(x) \geq 0$ et $\varphi(0) = 0$).

Conservation de l'énergie

Proposition 7.6.1 La fonction $H : \mathcal{O} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$H(X, V) = \frac{\|V\|^2}{2} + \varphi(X)$$

est constante sur les trajectoires du système (SC) :

Si $t \rightarrow (X(t), V(t))$ est une solution maximale de (SC) définie sur un intervalle ouvert I , alors

$$\frac{d}{dt} H(X(t), V(t)) = 0$$

pour tout $t \in I$.

Remarque

En mécanique, H représente l'énergie du système considéré (somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle). La proposition exprime la conservation au cours du temps de l'énergie totale du système. Pour cette raison, le système différentiel (SC) est dit **conservatif**.

Démonstration de la Proposition : il s'agit d'un simple calcul.

Soit $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ et $V(t) = (v_1(t), \dots, v_n(t))$, alors

$$H(X(t), V(t)) = \frac{1}{2} (v_1^2(t) + \dots + v_n^2(t)) + \varphi(x_1(t), \dots, x_n(t)) \text{ et}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(X(t), V(t)) &= v_1(t)v_1'(t) + \dots + v_n(t)v_n'(t) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(X(t))x_1'(t) + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(X(t))x_n'(t) \\ &\stackrel{(a)}{=} v_1(t)v_1'(t) + \dots + v_n(t)v_n'(t) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(X(t))v_1(t) + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(X(t))v_n(t) \\ &\stackrel{(b)}{=} 0 \end{aligned}$$

où nous avons utilisé

(a) $x_i'(t) = v_i(t)$ (les n premières équations de (SC)).

(b) $v_i'(t) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(X(t))$ (d'après les n dernières).

Le Théorème de Lejeune-Dirichlet

Nous sous-entendons toujours les notations et hypothèses définissant le système (SC) (voir le paragraphe « Le cadre mathématique »).

Remarquons que (X_0, V_0) est un point d'équilibre de (SC) si et seulement si

$$f(X_0, V_0) = (V_0, -\text{grad } \varphi(X_0)) = (0, 0)$$

c'est-à-dire $V_0 = 0$ et X_0 point critique de la fonction φ .

Voici un résultat classique de mécanique

Théorème 7.6.2 (Lejeune-Dirichlet)

Supposons que φ admet un minimum local strict en $X_0 \in \mathcal{O}$.

Alors $(X_0, 0)$ est un point d'équilibre

— stable,

— non asymptotiquement stable

du système

$$\begin{cases} X'(t) = V(t) \\ V'(t) = -\text{grad } \varphi(X(t)) \end{cases} \quad (SC)$$

Nous avons déjà illustré ce théorème dans le cadre de l'oscillateur harmonique non amorti (Sect. 7.2.5 : voir les remarques sur la conservation de l'énergie).

Démonstration : Remarquons d'abord que

Si X_0 est un minimum local strict de φ , alors $(X_0, 0) \in \mathcal{O} \times \mathbb{R}^n$ est un minimum local strict de la fonction H .

Par hypothèse, il existe un voisinage $U' \subset \mathbb{R}^n$ de X_0 tel que

$$\varphi(X) > \varphi(X_0), \quad \text{pour tout } X \in U', X \neq X_0$$

Montrons donc que la fonction

$$H(X, V) = \frac{\|V\|^2}{2} + \varphi(X)$$

admet un minimum local strict en $(X_0, 0)$: si $(X, V) \in U' \times \mathbb{R}^n$, $(X, V) \neq (X_0, 0)$, on a

$$H(X, V) > H(X_0, 0)$$

En effet :

i) Si $V \neq 0$, on a $H(X, V) = \frac{\|V\|^2}{2} + \varphi(X) > \varphi(X) \geq \varphi(X_0) = H(X_0, 0)$,
pour tout $X \in U'$.

ii) Si $V = 0$, alors $H(X, 0) = \varphi(X) > \varphi(X_0) = H(X_0, 0)$, pour tout $X \in U'$, $X \neq X_0$

□

Soit donc $U \subset \mathcal{O} \times \mathbb{R}^n$ un voisinage de $(X_0, 0)$ tel que

$$H(X, V) > H(X_0, 0) = \varphi(X_0)$$

pour tout $(X, V) \in U, (X, V) \neq (X_0, 0)$.

Pour montrer que $(X_0, 0)$ est un point d'équilibre stable de (SC) on se donne

$$B_\epsilon((X_0, 0)) \subset \mathcal{O} \times \mathbb{R}^n$$

la boule ouverte de \mathbb{R}^{2n} de centre $(X_0, 0)$ et rayon $\epsilon > 0$.

On doit trouver $0 < \delta \leq \epsilon$ tel que, pour tout $(X, V) \in B_\delta((X_0, 0))$ on a

$$\Phi(t, (X, V)) \in B_\epsilon((X_0, 0))$$

pour tout $t \geq 0$ (Φ étant le flot du système (SC)).

Construction de la boule fermée $BF_\rho((X_0, 0))$ et de l'ouvert W :

Soit $\rho > 0$ tel que $BF_\rho((X_0, 0))$, la boule fermée de centre $(X_0, 0)$ et rayon ρ , vérifie

$$BF_\rho((X_0, 0)) \subset B_\epsilon((X_0, 0)) \cap U$$

La boule fermée $BF_\rho((X_0, 0))$ est la réunion disjointe de la boule ouverte $B_\rho((X_0, 0))$ et de S_ρ , la « sphère » de rayon ρ centrée en $(X_0, 0)$:

$$S_\rho = \{ (X, V) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \|(X, V) - (X_0, 0)\| = \rho \}$$

Sur le compact S_ρ , la fonction continue H admet un minimum absolu m qui vérifie

$$H(X_0, 0) < m$$

puisque $S_\rho \subset U$. Soit alors

$$W = \{ (X, V) \in B_\rho((X_0, 0)) \mid H(X, V) < m \}$$

On a $(X_0, 0) \in W$ et W ouvert (la fonction H est continue : l'inégalité stricte $H(X, V) < m$ définit un ouvert). □

Pour tout $(X, V) \in W$, le flot $\Phi(t, (X, V))$ est défini pour tout $t \in \mathbb{R}$ et vérifie

$$\Phi(t, (X, V)) \in B_\rho((X_0, 0))$$

En effet, soit maintenant $(X_1, V_1) \in W$ fixé. Le flot

$$\Phi(t, (X_1, V_1))$$

sera défini pour tout $t \in I$, intervalle ouvert contenant 0. Remarquons que

$$\Phi(t, (X_1, V_1)) \in B_\rho((X_0, 0)) \tag{*}$$

pour tout $t \in I$. En effet, dans le cas contraire il existerait $t_0 \in I$ tel que

$$\Phi(t_0, (X_1, V_1)) \in S_\rho$$

ce qui est absurde car H est constant sur les trajectoires de (SC) et on aurait

$$m \leq H(\Phi(t_0, (X_1, V_1))) = H((X_1, V_1)) < m$$

A partir de (*) on a pour tout $t \in I$

$$\Phi(t, (X_1, V_1)) \in BF_\rho((X_0, 0)) \text{ (compact!)}$$

et le Th. des bouts implique alors que $I = \mathbb{R}$ (voir Corollaire 7.1.3). \square

Montrons que $(X_0, 0)$ est un point d'équilibre stable :

Nous avons montré que pour tout $(X, V) \in W$, le flot $\Phi(t, (X, V))$ est défini pour tout $t \in \mathbb{R}$ et vérifie

$$\Phi(t, (X, V)) \in B_\rho((X_0, 0))$$

Comme W est un ouvert qui contient $(X_0, 0)$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$B_\delta((X_0, 0)) \subset W \subset B_\rho((X_0, 0)) \subset B_\epsilon((X_0, 0))$$

et on a

$$\Phi_t(B_\delta((X_0, 0))) \subset B_\epsilon((X_0, 0))$$

pour tout t , en particulier si $t \geq 0$: $(X_0, 0)$ est bien un point d'équilibre stable. \square

Montrons enfin que $(X_0, 0)$ n'est pas asymptotiquement stable :

Soit $(X, V) \in B_\delta((X_0, 0))$, $(X, V) \neq (X_0, 0)$. Puisque $B_\delta((X_0, 0)) \subset U$, il vient

$$H(X, V) - H(X_0, 0) = \alpha > 0$$

Comme $H(\Phi(t, (X, V))) = H((X, V))$ pour tout t , on a aussi

$$H(\Phi(t, (X, V))) - H(X_0, 0) = \alpha > 0$$

pour tout t . Par conséquent

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi(t, (X, V)) = (X_0, 0)$$

est impossible, car la continuité de H impliquerait

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} H(\Phi(t, (X, V))) = H(X_0, 0)$$

\square

Systèmes Hamiltoniens

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 .

Désignons par (X, Y) les éléments de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, avec $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$.
On notera alors $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ et $Y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$.

Le **système hamiltonien** associé à la fonction H est, par définition, le système différentiel défini sur Ω par

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_1(t) = \frac{\partial H}{\partial y_1}(X(t), Y(t)) \\ \vdots \\ x'_n(t) = \frac{\partial H}{\partial y_n}(X(t), Y(t)) \\ \\ y'_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1}(X(t), Y(t)) \\ \vdots \\ y'_n(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_n}(X(t), Y(t)) \end{array} \right. \quad (SH)$$

On montre facilement que les points d'équilibre de (SH) sont les points critiques de la fonction H et que cette fonction est constante sur les trajectoires du système (SH) .

Le lecteur vérifiera sans peine que tout système de la forme (SC) est un système hamiltonien. Il suffit de prendre

$$H(X, Y) = \frac{\|Y\|^2}{2} + \varphi(X)$$

(voir les notations et hypothèses du paragraphe « Le cadre mathématique », ici $V = Y$).

Enfin, on peut reprendre (à l'identique) la démonstration du Théorème de Lejeune-Dirichlet pour établir le résultat suivant

Si (X_0, Y_0) est un minimum local strict de la fonction H , alors (X_0, Y_0) est un point d'équilibre stable, non asymptotiquement stable, du système hamiltonien (SH) .

7.7 Le pendule simple

7.7.1 Le pendule non amorti

Le pendule est constitué par un point matériel de masse m attaché à une extrémité d'une tige rectiligne de longueur l et de masse négligeable. La tige peut tourner, autour de son autre extrémité dans un plan vertical. Le frottement est supposé négligeable (pendule non amorti).

Si θ est l'angle orienté que fait le pendule avec la verticale, l'équation du mouvement est

$$\theta''(t) = -\frac{g}{l} \sin \theta(t)$$

En introduisant la vitesse angulaire $\omega(t) = \theta'(t)$ on obtient le système différentiel

$$\begin{cases} \theta'(t) = \omega(t) \\ \omega'(t) = -\frac{g}{l} \sin \theta(t) \end{cases} \quad (S)$$

On considère $\theta \in \mathbb{R}$ pour tenir compte du nombre de tours. Le système s'écrit

$$(\theta'(t), \omega'(t)) = f(\theta(t), \omega(t))$$

avec $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ défini par $f(\theta, \omega) = (\omega, -\frac{g}{l} \sin \theta)$.

Points d'équilibre du système

On a $f(\theta, \omega) = 0$ si et seulement si $\omega = 0$ et $\theta = k\pi$.

Les points d'équilibre du système sont

1. $e_{2k\pi} = (2k\pi, 0)$ (équilibre bas)
2. $e_{\pi+2k\pi} = (\pi + 2k\pi, 0)$ (équilibre haut)

Translations et symétries des trajectoires

L'image par la translation de vecteur $\overrightarrow{(2\pi, 0)}$ d'une trajectoire est encore une trajectoire. En effet : si $t \rightarrow (\theta(t), \omega(t))$ est solution de (S), alors $t \rightarrow (\theta(t) + 2\pi, \omega(t))$ l'est aussi.

Pour étudier le portrait de phases il suffit d'étudier l'équilibre bas e_0 , l'équilibre haut e_π et les autres trajectoires pour $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

Remarquons aussi que la symétrie par rapport à l'origine conserve aussi les trajectoires : si $t \rightarrow (\theta(t), \omega(t))$ est solution du système, alors $t \rightarrow (-\theta(t), -\omega(t))$ est aussi une solution.

Conservation de l'énergie. Le Th. de Lejeune-Dirichlet

Le système (S) s'écrit

$$\begin{cases} \theta'(t) = \omega(t) \\ \omega'(t) = -\text{grad } \varphi(\theta(t)) \end{cases} \quad (S)$$

où $\varphi(\theta) = \frac{g}{l}(1 - \cos \theta)$ (des raisons physiques motivent le choix de la primitive de $\theta \rightarrow \frac{g}{l} \sin \theta$, on a : $\varphi(\theta) \geq 0$ et $\varphi(0) = 0$). Nous savons alors (voir la section précédente) que la fonction $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$H(\theta, \omega) = \frac{\omega^2}{2} + \frac{g}{l}(1 - \cos \theta)$$

est constante le long des trajectoires du système. En physique, l'énergie totale du pendule est

$$E(\theta, \omega) = ml^2 H(\theta, \omega) = \frac{1}{2} ml^2 \omega^2 + mgl(1 - \cos \theta)$$

Le pendule non amorti est un système **conservatif**.

Comme φ admet un minimum local strict en $\theta = 0$, le Th de Lejeune-Dirichlet (Th. 7.6.2) nous dit que l'équilibre bas $e_0 = (0, 0)$ est stable, non asymptotiquement stable.

Linéarisation autour des équilibres

La matrice jacobienne de $f(\theta, \omega) = (\omega, -\frac{g}{l} \sin \theta)$ en (θ, ω) est

$$J_f(\theta, \omega) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \theta} & \frac{\partial f_1}{\partial \omega} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \theta} & \frac{\partial f_2}{\partial \omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos \theta & 0 \end{pmatrix}$$

Dans l'équilibre haut $e_\pi = (\pi, 0)$

$$J_f(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont $\pm \sqrt{\frac{g}{l}}$ et le Th. de Liapounov (Th. 7.5.2) implique que le point d'équilibre e_π est instable.

L'origine est un col pour le système linéarisé.

Dans l'équilibre bas

$$J_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont de partie réelle nulle. Le Th. de Liapounov ne s'applique pas ici. Nous connaissons déjà la nature de ce point d'équilibre grâce au Th. de Lejeune-Dirichlet.

Classification des trajectoires selon leur énergie : portrait de phases (Figure 7.18)

La résolution explicite du système (S) n'est pas aisée. Les solutions ne s'expriment pas en termes de fonctions usuelles.

Nous allons tracer le portrait de phases du système en utilisant le fait que l'énergie

$$E(\theta, \omega) = \frac{1}{2}ml^2\omega^2 + mgl(1 - \cos \theta)$$

est constante le long des ses trajectoires.

- Remarquons que $E(\theta, \omega) \geq 0$ et que les trajectoires d'énergie nulle sont les points d'équilibre bas $(2k\pi, 0)$.

- On sait que l'image d'une trajectoire par la translation de vecteur $\overrightarrow{(2\pi, 0)}$ est une trajectoire, on voit à partir de l'expression de E que ces deux trajectoires ont la même énergie.

On a le même résultat concernant la symétrie par rapport à l'origine.

Il suffira alors pour notre classification d'étudier les trajectoires pour $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

- Fixons $E > 0$ et étudions le lien entre θ et ω si $E(\theta, \omega) = E$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}ml^2\omega^2 + mgl(1 - \cos \theta) = E &\Leftrightarrow l^2\omega^2 + 4gl \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{2E}{m} \\ &\Leftrightarrow \omega^2 = \frac{2}{l} \left(\frac{E}{ml} - 2g \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned} \quad (*)$$

- Trajectoires d'énergie $E > 2gml$.

Dans ce cas $\frac{E}{ml} - 2g \sin^2 \frac{\theta}{2} > 0$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et on trouve d'après (*) deux trajectoires d'équation

$$\omega(\theta) = \pm \sqrt{\frac{2}{l} \left(\frac{E}{ml} - 2g \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)}$$

elle sont périodiques dans la variable θ , $\omega(\theta)$ reste de signe constant sur chacune d'elles.

Si $\omega > 0$, alors l'angle $\theta(t)$ est une fonction croissante de t ($\theta'(t) = \omega(t)$).

Si $\omega < 0$, alors $\theta(t)$ est une fonction décroissante de t .

Lors de ces mouvements le pendule fait, au cours du temps, un nombre illimité de tours.

- Trajectoires d'énergie $E = 2gml$.

Maintenant (*) s'écrit

$$\omega^2 = \frac{2}{l} \left(2g - 2g \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) = \frac{4g}{l} \left(1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) = \frac{4g}{l} \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

Si $\theta = -\pi$ ou $\theta = \pi$ on retrouve deux équilibres hauts.

Si $\theta \in]-\pi, \pi[$ on retrouve deux trajectoires

$$\omega(\theta) = \pm 2\sqrt{\frac{g}{l}} \cos \frac{\theta}{2}$$

Il s'agit de deux arcs de courbe ouverts qui joignent les équilibres hauts $(-\pi, 0)$ et $(\pi, 0)$, l'un dans le demi-plan $\omega > 0$, l'autre dans le demi-plan $\omega < 0$.

- Trajectoires d'énergie $0 < E < 2gml$.

D'après (*), pour que ω soit défini, on doit avoir

$$\frac{E}{2gml} \geq \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) \Leftrightarrow \cos \theta \geq 1 - \frac{E}{gml}$$

Si $\theta \in]-\pi, \pi[$, cela revient à dire que

$$\theta \in \left[-\arccos \left(1 - \frac{E}{gml} \right), \arccos \left(1 - \frac{E}{gml} \right) \right]$$

L'équation (*) définit pour ces valeurs de θ une trajectoire périodique entourant l'équilibre bas $(0, 0)$. Le pendule oscille indéfiniment autour de sa position d'équilibre stable entre deux valeurs extrêmes de l'angle

$$\theta = \pm \arccos \left(1 - \frac{E}{gml} \right)$$

On retrouve dans le portrait de phases le fait que l'équilibre bas est stable, mais non asymptotiquement stable.

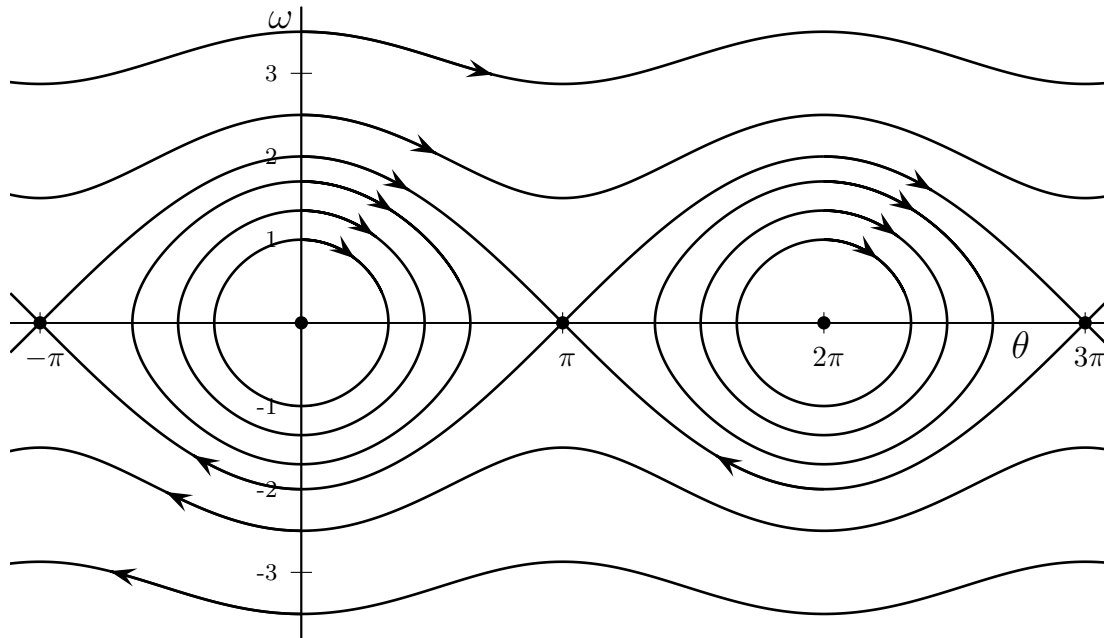


FIGURE 7.18 – Portrait de phases du pendule non amorti (ici $g/l = 1$).

7.7.2 Le pendule amorti

Si l'on suppose qu'il y a une force de frottement proportionnelle à la vitesse angulaire, l'équation du mouvement dévient

$$\begin{cases} \theta'(t) = \omega(t) \\ \omega'(t) = -\frac{g}{l} \sin \theta(t) - \gamma \omega(t) \end{cases} \quad (S')$$

où $\gamma > 0$.

Les points d'équilibre de (S') sont les équilibres bas $(2k\pi, 0)$, et hauts $(\pi + 2k\pi, 0)$.

Comme pour le système (S) , la translation de vecteur $\overrightarrow{(2\pi, 0)}$ conserve les trajectoires de (S') . La symétrie par rapport à l'origine aussi.

L'énergie totale du pendule est toujours donnée par

$$E(\theta, \omega) = \frac{1}{2}ml^2\omega^2 + mgl(1 - \cos \theta)$$

Si $t \rightarrow (\theta(t), \omega(t))$ est une solution de (S') , on montre facilement que

$$\frac{d}{dt}E(\theta(t), \omega(t)) = -\gamma ml^2\omega^2(t) \leq 0$$

L'énergie décroît le long des trajectoires de (S') : il s'agit d'un système **dissipatif**.

Linéarisation autour de l'équilibre haut

Le système (S') est s'écrit

$$(\theta'(t), \omega'(t)) = f(\theta(t), \omega(t))$$

où la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est donnée par

$$f(\theta, \omega) = \left(\omega, -\frac{g}{l} \sin \theta - \gamma \omega \right)$$

La matrice jacobienne de f au point (θ, ω) est

$$J_f(\theta, \omega) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \theta} & \frac{\partial f_1}{\partial \omega} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \theta} & \frac{\partial f_2}{\partial \omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos \theta & -\gamma \end{pmatrix}$$

Pour l'équilibre haut $(\pi, 0)$ on obtient

$$J_f(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\gamma \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont réelles, de signe contraire. D'après le Th. de Liapounov, l'équilibre haut est instable pour (S') .

L'origine est un col pour le système linéarisé.

Linéarisation autour de l'équilibre bas

On obtient dans ce cas

$$J_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\gamma \end{pmatrix} = M$$

On a $\text{trace}(M) = -\gamma < 0$, $\det(M) = \frac{g}{l} > 0$ et le discriminant du polynôme caractéristique est

$$\Delta = (\gamma)^2 - 4\frac{g}{l}$$

Par conséquent :

1. Si $\gamma > 2\sqrt{\frac{g}{l}}$ (**amortissement fort**, Fig. 7.19) :

La matrice M admet deux valeurs propres réelles ($\Delta > 0$), de même signe ($\det(M) > 0$), négatif ($\text{trace}(M) < 0$).

D'après le Th. de Liapounov, l'équilibre bas $(0,0)$ est **asymptotiquement stable**.

L'origine est un **nœud attractif** pour le système linéarisé.

Le pendule tend vers sa position d'équilibre **sans osciller**.

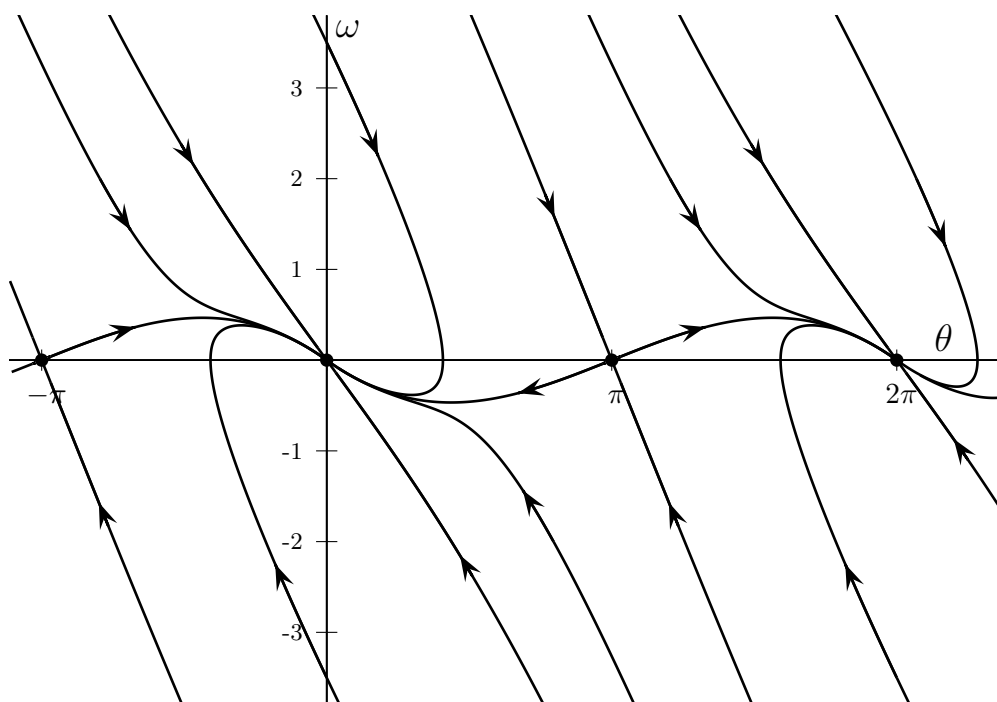


FIGURE 7.19 – Amortissement fort (ici $g/l = 1$ et $\gamma = 2.1$).

2. Si $\gamma = 2\sqrt{\frac{g}{l}}$ (**amortissement critique**) :

M possède une valeur propre double ($\Delta = 0$) négative ($\text{trace}(M) < 0$).

D'après le Th. de Liapounov, l'équilibre bas $(0, 0)$ est **asymptotiquement stable**.

L'origine est un **nœud impropre attractif** pour le système linéarisé.

Le pendule tend vers sa position d'équilibre **sans osciller**.

3. Si $\gamma < 2\sqrt{\frac{g}{l}}$ (**amortissement faible, Fig 7.20**) :

La matrice M a deux valeurs propres complexes conjuguées ($\Delta < 0$) de partie réelle négative ($\text{trace}(M) < 0$).

D'après le Th. de Liapounov, l'équilibre bas $(0, 0)$ est **asymptotiquement stable**.

L'origine est un **foyer attractif** pour le système linéarisé.

Le pendule tend vers sa position d'équilibre par des **oscillations amorties**.

L'équilibre bas est donc un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le pendule amorti.

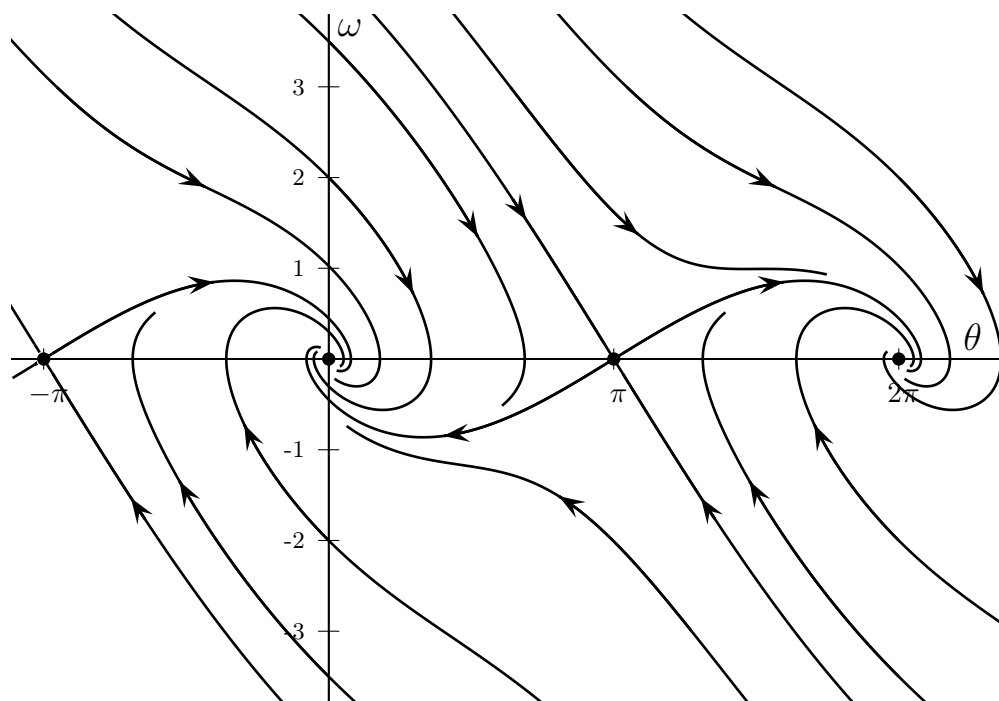


FIGURE 7.20 – Amortissement faible (ici $g/l = 1$ et $\gamma = 1$).

Table des matières

7	Théorie qualitative des systèmes différentiels	1
7.1	Introduction	1
7.1.1	Systèmes différentiels autonomes du premier ordre	1
7.1.2	Trajectoires. Portrait de phases	5
7.1.3	Flot d'un système différentiel (Compléments)	12
7.1.4	Point d'équilibre stable, asymptotiquement stable	13
7.1.5	Lien entre les systèmes différentiels de matrice A et $P^{-1}AP$	14
7.2	Systèmes différentiels linéaires dans le plan	17
7.2.1	Cas 1. Le système de matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$	17
7.2.2	Cas 2. Le système de matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$	22
7.2.3	Cas 3. Le système de matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $b \neq 0$	25
7.2.4	Le portrait de phases de $X'(t) = AX(t)$ à partir de $\text{trace}(A)$ et $\det(A)$	27
7.2.5	Portrait de phases de l'oscillateur harmonique	29
7.2.6	Familles à un paramètre de systèmes différentiels linéaires	32
7.3	Portraits de phase en dimension 1	34
7.3.1	Familles à un paramètre d'équations autonomes. Bifurcation	37
7.4	Stabilité asymptotique des points d'équilibre d'un système linéaire dans \mathbb{R}^n	39
7.5	Linéarisation autour d'un point d'équilibre	41
7.5.1	Le Théorème de Liapounov	42
7.6	Systèmes conservatifs	43
7.7	Le pendule simple	50
7.7.1	Le pendule non amorti	50

7.7.2	Le pendule amorti	54
-------	-----------------------------	----

